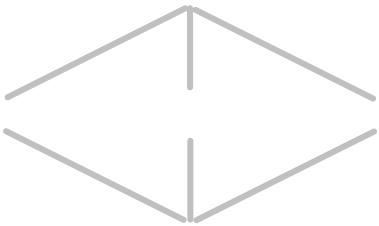
Juan Grompone

Estudios sobre la lógica dialéctica



La flor del Itapebí
2003

Publicada originalmente en GALILEO, Publicación dedicada a problemas metacientíficos, Instituto de Filosofía de la Facultad de Humanidades y Ciencias, Universidad de la República, bajo la dirección de Mario H. Otero, Alción Cheroni y Juan A. Grompone. Segunda época, Número 3–4, octubre 1989.

Esta versión electrónica se puede imprimir en formato A4, a doble faz. En el prólogo de 2003 y en algunas notas al pie se presentan las pequeñas diferencias con la publicación original.

Versión 1.0

ISBN 9974–592–xx–x

Contenido

Prólogo de 2003

Esta versión electrónica corresponde a la versión de 1989 publicada en GALILEO. Se han realizado modificaciones tipográficas para mejorar la presentación, pero he intentado respetar el texto original en todo lo posible. Empleo tipografía helvética, itálica, –por ejemplo *q*– para los valores lógicos y las variables de las expresiones; empleo las negritas itálicas –por ejemplo ***N***– para indicar los operadores sobre estas variables. Empleo tipografía romana en negrita –por ejemplo **L**– para indicar los diversos conjuntos.

Se han incluido notas al pie –en la publicación original no existían– con la finalidad de corregir errores, omisiones o completar el texto en aquellos puntos en que el estudio posterior ha mostrado que estaba mal.

La definición 4.3 del reticulado dialéctico era imprecisa. En esta nueva versión se incluye la nueva definición (si bien no se lo hace con toda la formalidad posible). La Figura 1a ilustra un caso de este reticulado y las notas al pie aclaran los conceptos involucrados.

Desde la publicación original he avanzado en algunos aspectos de la lógica dialéctica pero no se incluyen en esta versión. Quedarán para alguna versión futura cuando este estudio lo considere razonablemente completo. No obstante esto, vale la pena destacar algunos de estos aspectos en este prólogo.

La noción de funciones lógicas intrínsecas no aparece en esta publicación y, sin embargo, me parece esencial. Son aquellas funciones para las cuales *los valores dialécticos son indistinguibles*. En el caso hegeliano, para tomar un ejemplo concreto, no se puede aceptar que haya funciones que diferencien *t* a *s*. Deben ser enteramente simétricas en ellas. Esta diferenciación impone limitaciones muy serias y muy importantes.

Sea ***A*** una transformación que intercambie *t* a *s* entre sí, sin modificar *0* o *1*, entonces si ***F****(x)* es una función *intrínseca* se debe cumplir este diagrama funcional:

$$
\begin{array}{ccc}
x & \xrightarrow{\mathbf{F}} & \mathbf{F}(x) \\
\downarrow \mathbf{A} & & \downarrow \mathbf{A} \\
y & \xrightarrow{\mathbf{F}} & \mathbf{F}(y)
\end{array}
$$

Esta relación se puede expresar, en forma algebraica como:

$$\mathbf{A}\ \mathbf{F}(x) = \mathbf{F}(\mathbf{A}\ x)$$

y esto debe ocurrir para todo automorfismo de transformación de los valores dialécticos, es decir, para todo automorfismo *intrínseco*.

Una propiedad importante de las funciones intrínsecas es la *conservación de las propiedades formales de la lógica binaria*. Uno debería esperar que todas las funciones que poseen significado para la dialéctica deberían conservar las propiedades de la lógica binaria en algún sentido. En un sentido mínimo, las funciones no deberían tomar valores dialécticos sobre los valores 0 y 1. Esto ocurre efectivamente así:

$$\mathbf{F}(0) = \mathbf{F}(A0) = \mathbf{A}\ \mathbf{F}(0)$$
$$\mathbf{F}(1) = \mathbf{F}(A1) = \mathbf{A}\ \mathbf{F}(1)$$

Luego estos valores deben ser 0 o 1. Las funciones lógicas intrínsecas garantizan que todo aquello que se cumple para la lógica dialéctica, si los enunciados poseen solamente los valores verdadero o falso, también se cumplen para la lógica binaria. Es un principio deseable de compatibilidad.

El exigir que las funciones lógicas sean intrínsecas tiene consecuencias importantes para la función implicación. La menor y la mayor de todas las funciones implicación intrínsecas son:

$$x \Rightarrow y = y + \mathbf{G}(\mathbf{N}x) = y + \mathbf{N}\ \mathbf{M}(x)$$
$$x \Rightarrow y = \mathbf{M}(y) + \mathbf{G}(\mathbf{N}x)$$

donde $\mathbf{G}$ y $\mathbf{M}$ son las funciones de Lukasiewicz. Es posible caracterizar una familia general de funciones implicación. Sea $\mathbf{P}(x,y)$ una función monótona e intrínseca. Entonces, se tiene para la implicación intrínseca general la expresión y la acotación:

$$y + \mathbf{G}(\mathbf{N}x) \leq y + \mathbf{G}(\mathbf{N}x) + \mathbf{M}(y)\ .\ \mathbf{P}(\mathbf{N}x,y) \leq \mathbf{M}(y) + \mathbf{G}(\mathbf{N}x)$$

Este estudio es esencialmente *semántico*, se basa en la estructura algebraica de los valores lógicos. Pero hay otra manera de analizar la lógica: como un conjunto de reglas sintácticas de construir enunciados, ver, por ejemplo, [26] [27]. Existe una dialéctica sintáctica y, sin duda, posee más interés que estos aspectos semánticos o algebraicos. A los efectos de ilustrar esta presentación que es equivalente a la presentación semántica consideraré como ejemplo el esquema sintáctico de introducción de la negación. Este esquema [1] expresa el mecanismo dialéctico del razonamiento por absurdo.

| | *a*
| ———
| |...
| | *Na*
| ...
| *Na*

La regla de la lógica binaria clásica es bastante más fuerte y su enunciado sintáctico es:

| | *a*
| ———
| |...
| | *b*
| |...
| | *Nb*
| ...
| *Na*

La aparición de una contradicción, tal como *b* y ***N****b*, es frecuente en

[1] Se suele llamar *consequentia mirabilis* (consecuencia admirable) según la tradición. El enunciado dialéctico es más restringido que en la lógica formal.

el razonamiento dialéctico y no permite concluir nada de interés. La aplicación de la regla tradicional de introducción de la negación conduce al *ex contraditione quodlibet*, de la contradicción se deduce cualquier cosa. Este resultado es inaceptable para la dialéctica y para el razonamiento cotidiano como lo muestra el siguiente ejemplo:

Este punto es tan importante que nos detendremos con un ejemplo. Existe un argumento que se atribuye al musulmán que destruyó la biblioteca de Alejandría:

> Si estos libros coinciden con el Corán, están de más y se pueden destruir; si no coinciden, hay que destruirlos por infieles.

Desde el punto de vista formal corresponde al esquema de razonamiento del llamado “principio de contradicción”.

| | libros
| ———
| | ...
| | Corán
| | ...
| | N Corán
| ...
| N libros

La manera de argumentar solamente es válida en la lógica binaria y no en el razonamiento cotidiano espontáneo [2]. El punto endeble de este esquema es que se puede reemplazar el “Corán” –supuestamente una verdad absoluta– por cualquier otro libro y *el razonamiento formal seguiría siendo válido* lo cual muestra la falacia del esquema. Todos los libros, como portadores de una verdad parcial, deben ser cuidadosamente preservados.

Montevideo, diciembre de 2003

---

[2] En cualquiera de las dialécticas se diría que cualquiera de las dos partes de la afirmación posee valor tesis y, por lo tanto, no hay ni conclusión ni contradicción. Los libros coinciden con el Corán con valor tesis y no coinciden con valor antítesis.

Prólogo de 1989

La versión de “Dialéctica” que se publica fue redactada en 1985 y su texto no ha sido corregido desde entonces. Como en todo elemento en movimiento hay, en su publicación, dos fuerzas antagónicas en pugna. Por un lado existe la idea (correcta) que ningún trabajo esta terminado y perfecto jamás. Por otro lado, existe la idea (también correcta) que en cuatro años hay muchas modificaciones al texto de 1985.

Supongamos, como síntesis de la contradicción, que la publicación puede contribuir a estudiar el tema de la formalización de la dialéctica. En este caso es necesario realizar algunas precisiones para aclarar los errores más importantes del texto que se publica. También interesa aclarar aquellos puntos donde la teoría ha avanzado pero se encuentra bajo la forma de borradores y notas dispersas.

En este texto no aparece definido en forma clara en que consiste un reticulado dialéctico. Hoy esta noción esta firmemente establecida. Existe un homomorfismo (“cósmico” se lo llama en el texto) que aplica las proposiciones de nuestro conocimiento sobre un reticulado. Este reticulado posee la característica esencial: no posee imágenes homomorfas, es el resultado final del homomorfismo.

Con esta aclaración, un reticulado dialéctico es un reticulado que posee las dos propiedades esenciales (nueva definición 4.5):

- posee una negación estricta
- no posee imágenes homomórficas, es un reticulado simple

Con estas dos propiedades resulta claro que los reticulados de Lukasiewicz, la lógica difusa, la lógica Yin–Yang y tantas otras poseen la lógica binaria como imagen homomorfa y luego no son verdaderas formas lógicas (o dialécticas) sino variedades disfrazadas de la clásica lógica binaria. Como resultado de todo esto, en el texto hay muchos errores y tonterías.

El estudio sistemático de las propiedades de los reticulados dialécticos es un área especializada del álgebra que puede llamarse “dialéctica formal” o, simplemente, “la ciencia de la lógica”.

Un segundo punto donde es necesario indicar una laguna del texto es acerca del establecimiento del concepto de "verdadero" y "falso". Ya Lukasiewicz señalaba que los conjuntos "verdadero" y "falso" eran dos conjuntos disjuntos entre los cuales se pueden clasificar las proposiciones. En el momento actual es posible agregar algo más.

Sea **V** el conjunto de las proposiciones "verdaderas" y **F** el de las "falsas". Si consideramos los esquemas clásicos de deducción –Modus Tollendo Ponens (MTP) y Modus Ponendo Tollens (MPT)– tenemos:

MTP: Si $a + b \, \varepsilon \, \mathbf{V}$ y $a \, \varepsilon \, \mathbf{F}$ entonces $b \, \varepsilon \, \mathbf{V}$

MPT: Si $a \,.\, b \, \varepsilon \, \mathbf{V}$ y $a \, \varepsilon \, \mathbf{V}$ entonces $b \, \varepsilon \, \mathbf{V}$

Pero de aquí resulta inmediatamente que el conjunto **F** es un ideal (en el sentido de los reticulados) puesto que:

- si $a, b \, \varepsilon \, \mathbf{F}$, entonces, $a+b \, \varepsilon \, \mathbf{F}$ para no contradecir el MTP.
- si $a \, \varepsilon \, \mathbf{F}$, entonces, $a.b \, \varepsilon \, \mathbf{F}$ para no contradecir el MPT.

Resulta entonces claro que bajo el homomorfismo "cósmico" este ideal **F** solamente se puede convertir en el elemento 0 sin contradecir las propiedades de la negación. De allí las definiciones que se realizan en el texto, a partir de la sección 5, muchas veces sin mayor justificación y en abierta discrepancia con la idea original de Lukasiewicz de un único valor verdaderos y muchos falsos. En su interpretación, **V** es un ideal dual del reticulado. En nuestro punto de vista, **F** es un ideal. De más esta decir que si ocurre, a la vez, que **V** es un ideal dual y **F** un ideal, la lógica es binaria como puede demostrarse fácilmente.

Un tercer punto que no queda claro en el texto es la importancia substantiva de las propiedades de monotonía. La propiedad esencial de monotonía posee el siguiente significado:

$a < b$ significa que b es una tesis "más fuerte" que a

El valor *0* indica que la proposición es falsa, el valor *1* que es absoluta y totalmente verdadera. Los valores intermedios establecen, tal como se introdujo en las viejas lógicas modales, grados de fortaleza formal de la tesis.

Las derivaciones de este hecho son fundamentales y no se encuentran en el texto. Notemos, al pasar, una de carácter fundamental sobre la función implicación. La función x Þ y es una función de dos variables que posee las propiedades:

- es monótona en la segunda variable
- es anti–monótona en la primera variable

Estas propiedades resultan que una implicación es tanto más fuerte cuanto más fuerte sea su consecuente o cuanto más débil sea su antecedente. Como es natural, todo cuanto se relaciona con este punto no está presente en el texto publicado y algunos puntos se vuelven oscuros o de interés relativo.

Finalmente, hay muchos resultados que se presentan en el texto que están mal demostrados, son conjeturas o son falsos. Deben ser tomados como un intento parcial de abarcar un tema demasiado extenso y difícil.

Montevideo, mayo de 1989

Prólogo de 1985

–1–

Las pocas veces que comenté el proyecto de este libro encontré una misma respuesta: *¡cuidado!* Todos los compañeros materialistas dialécticos poseen reservas acerca de la exploración de los principios de la dialéctica desde un punto de vista formal. En un cierto sentido tienen razón, en otro no. La propia existencia de este libro es, desde el principio, una cuestión dialéctica. Se repetía así la historia de "Las Leyes de El Capital".

Las oposiciones son de diferentes estilos. Hay quienes dicen que la dialéctica no es formalizable ni expresable, lisa y llanamente. No dan mayores argumentos, solamente *lo sienten* así. Creo que no hay aquí un verdadero argumento sino el reflejo de muchos años de confusión. En la vida cotidiana se emplea con gran liberalidad la palabra *dialéctica* para indicar simplemente una *interacción recíproca*. Cuando se dice que existe una relación dialéctica entre la teoría y la acción o entre la ciencia y la tecnología se realizan afirmaciones correctas. Pero muchas veces quien las enuncia solamente repite afirmaciones clásicas del materialismo dialéctico que verdaderamente no comparte en sus alcances. Estas afirmaciones no son "más dialécticas" que decir, por ejemplo, *es una hermosa mañana de sol*. Por esta razón decimos que estos compañeros no comprenden los alcances dialécticos de lo que afirman.

Hay otros compañeros que temen que una formalización conducirá a un planteo *mecánico*, a una trivialización de las ideas de la dialéctica. El temor es correcto. Durante los largos años de búsqueda que condujeron a este trabajo, todos los días sentí ese temor. Ahora que esta bastante terminado –nunca se puede decir que un estudio que pretende ser científico esta terminado del todo– pienso que este temor ha desaparecido. Hay varias razones para pensar así.

En primer lugar, en este trabajo se analizan solamente dos leyes de la dialéctica, la tercera no es una ley formal en el sentido de la lógica y tiene poco que ver con este estudio. Un poco más adelante regresaremos sobre el punto.

En segundo lugar, ha sido posible aclarar un punto difícil: la relación entre el pensamiento lógico tradicional y el pensamiento dialéctico. Más aun, creo haber podido demostrar que aún la matemática lleva, *desde un punto de vista formal y esto es lo importante* al pensamiento dialéctico. Esta afirmación es clásica dentro de los materialistas dialécticos, pero nunca se habían dado argumentos *lógicos* para afirmarlo, solamente argumentos epistemológicos.

En tercer lugar, se establece la continuidad histórica del pensamiento dialéctico y su aplicación a la vida cotidiana para una cantidad de casos. Este es otro punto esquivo en las presentaciones clásicas.

En cuarto lugar, se convierte al pensamiento dialéctico en un *tema de investigación académica*. Esto posee más importancia de lo que parece en un primer examen. Al ganar un lugar para la dialéctica dentro de los estudios de la ciencia de la lógica se está dando un paso enorme en la lucha ideológica. Tal vez, algún día, se logre dar el siguiente paso: la aceptación entre los economistas “científicos” de las leyes de la economía tal como las estudia y enuncia el materialismo histórico.

–2–

La realidad del Universo exige que, además de estudiar la materia, se estudie también el *movimiento de la materia* en forma científica. Si suponemos, tal como ha ocurrido hasta hoy, que la *lógica formal* (o lógica aristotélica o clásica o binaria como diremos muchas veces) es el reflejo de las leyes generales de la materia, la *lógica dialéctica* corresponderá a las leyes generales del movimiento de la materia. El propósito de este trabajo ha sido formulado, largo tiempo atrás, por Engels:

> No nos proponemos aquí escribir una tratado de dialéctica sino simplemente demostrar que las leyes de la dialéctica son otras tantas leyes reales que rigen el desarrollo de la naturaleza y cuya vigencia es también aplicable, por tanto, a la investigación teórica natural. (...) Las tres leyes han sido desarrolladas por Hegel, en su manera idealista, como simples leyes del pensamiento (...) El error reside en que estas leyes son impuestas, como leyes del pensamiento, a la naturaleza y a la historia en vez de derivarlas de ellas. [16]

Lamentablemente el texto de Engels solamente analiza en forma directa la primera ley: la ley del cambio de la cantidad en la calidad. Esta ley no ofrece mayores dificultades de comprensión:

> Podemos expresar esta ley, para nuestro propósito, diciendo que, en la naturaleza, y de un modo claramente establecido para cada caso singular, los cambios cualitativos solo pueden producirse mediante la adición o sustracción cuantitativas de materia o de movimiento (...) [16]

La ley establece que la causa de los cambios es la acumulación de la cantidad. No se trata de una ley formal sino material, por esta razón solamente en forma indirecta se reflejará en este trabajo. La segunda ley, la ley de penetración de los contrarios establece:

> Todos los procesos de la naturaleza poseen dos caras (...) [16]

Esto es todo. El análisis de la realidad lleva a dos aspectos que se presentan como diferentes, opuestos, contrarios, los dos polos entre los cuales se desenvuelve el movimiento. La búsqueda de estos contrarios no es una tarea sencilla ni puede ser manejada a la ligera.

La tercera ley de la dialéctica, sin duda la más fecunda desde el punto de vista formal, establece que el juego de contrarios regresa permanentemente a situaciones por las cuales se ha pasado, pero en una forma enriquecida, aumentada. El movimiento tiene tres fases consecutivas: punto de partida, negación del punto de partida y regreso al punto de partida: negación de la negación. La tercera ley de la dialéctica regula la causa de los movimientos.

Los propósitos de Engels para su “Dialéctica de la Naturaleza” no cristalizaron. Al igual que muchos otros textos clásicos, solamente disponemos de un amplísimo manuscrito sin completar. Tal vez el único trabajo dialéctico completo que existe es el primer libro de “El Capital”. Se presentan allí un conjunto importante de contrarios materiales.

En el capítulo 1 la mercancía aparece bajo un aspecto *cualitativo* y un aspecto *cuantitativo*. En el capítulo 3 la circulación de mercancías es el resultado de dos contrarios: *mercancía* y *dinero*. El capítulo 5 indica que el proceso de producción involucra dos contrarios: *pensamiento* y *trabajo*. En el capítulo 8 se introducen los contrarios básicos: *asalariados* y *empresarios*. En el capítulo 12 se habla de dos contrarios históricos: *la ciudad* y *el campo*.

Sin duda los contrarios de “El Capital” se parecen muy poco a los contrarios de la lógica tradicional. Es más, es sumamente dudoso que la lógica posea verdaderamente una noción de contrarios. He aquí entonces el material de nuestro estudio: contrarios, negaciones, penetraciones, movimiento.

–3–

La lógica, desde Aristóteles a nuestros días, se presenta como *natural*. En este hecho incide la tradición cultural, la educación, pero, por encima de todos estos hechos, *es natural porque fue impuesta al cerebro humano por la evolución de las especies*.

Si se intenta fundamentar la validez de la lógica de Aristóteles se pueden dar cuatro argumentos poderosos que afirman su carácter natural y su universal aplicabilidad a la ciencia.

El primer argumento es *histórico*. La existencia de los "Elementos" de Euclides, escritos 22 siglos atrás nos muestra que las estructuras lógicas, por lo menos en los últimos miles de años, no han cambiado. La continuidad histórica del pensamiento formal, que se pierde en el Egipto clásico, es un primer y fundamental argumento.

Las lenguas modernas pueden expresar cualquier estructura lógica booleana**.** *Este hecho ha ocurrido sin la intervención de los lógicos*, es un hecho *natural* y constituye un segundo y formidable argumento.

Sobre el funcionamiento del cerebro humano se conoce bien poco, sin embargo, dentro de lo conocido, ya se han podido encontrar *conexiones neuronales que arman circuitos lógicos binarios elementales* y también este es un hecho natural. Este es un tercer argumento.

El cuarto argumento es de carácter científico. La astronomía de los calendarios agrícolas empleó, en el pasado histórico, la matemática en forma profusa. Con Euclides y otros científicos alejandrinos, la geometría se convierte en una rama de la matemática deductiva. Con Galilei y con Newton, la física se convierte en una ciencia matemática. Con Lavoisier la química sigue el mismo camino. En el siglo presente, con la genética molecular, la biología sigue el camino de la formalización. Este proceso muestra que la herramienta fundamental para el análisis de la materia es la lógica de Boole y este es un formidable argumento.

Para estudiar la lógica dialéctica debemos seguir un camino similar. La dialéctica se debe buscar en aquellos puntos, en los intersticios donde se quebranta el pensamiento lógico y donde se identifica un área que no es analizable en los términos lógicos tradicionales. Por esta razón, las fuentes de la dialéctica se encuentran en las mismas fuentes de la lógica.

Puesto que la dialéctica es el reflejo de leyes generales del movimiento de la materia, debe existir una actividad *natural* del cerebro humano que sea dialéctica. También a la dialéctica debe ser aplicable el argumento de la evolución de las especies y debe también haber incidido por igual en los circuitos cerebrales. Así es que el cerebro –humano o animal– debe poseer una actividad dialéctica que le es útil para su relación con la naturaleza, así como la capacidad analítica lo es. En forma análoga, debe existir una lógica dialéctica escondida en un argumento histórico, en un argumento lingüístico, en un argumento fisiológico y en un argumento científico.

La búsqueda de la dialéctica se convierte entonces en la búsqueda de lo *no–lógico*, la búsqueda de las fallas y fisuras del aparentemente monolítico planteo de la lógica formal.

–4–

Muchos estudios de la lógica son pedantemente técnicos. Russell, Tarski y otros abrieron una puerta muy peligrosa el día que enunciaron la idea de que existen múltiples niveles para entender la lógica. Por esta puerta entra una forma pedante de presentar los problemas lógicos que no logra el propósito que se busca porque este propósito contradice el fundamento de la lógica: la lógica es impuesta por la naturaleza a la estructura del cerebro y no existen estas pretendidas meta–teorías.

Desde un punto de vista más directo, las presentaciones de la lógica, con su pretendida e imposible aspiración de eliminar al hombre pensante, se convierten en una pedante cadena de trivialidades, cada una, una meta–trivialidad de la anterior, que persigue una finalidad imposible. En resumen, hay una complacencia morbosa por demostrar que el pensamiento humano es el resultado mecánico de reglas de manipulación de símbolos y que todo lo demás es metafísica. Todas estas presentaciones cometen el error de olvidar que aun la frase: *esto es un libro de lógica* es una afirmación dialéctica. Para entenderla o bien se cae en el abismo de las meta–teorías o bien se entra de lleno en la dialéctica.

Eliminemos las meta–teorías y habremos simplificado la lógica; pero solamente en un ambiente dialéctico es posible esta transformación. Confiamos que este trabajo lo demuestre así.

–5–

Este trabajo pretende ser una investigación científica acerca de la lógica. Desde este punto de vista, puede ser considerado como una incursión en el tema de las lógicas “multivaluadas”. Es bien conocido que este tema ha sido estudiado muchas veces como una generalización abstracta de la lógica booleana. Este trabajo es diferente, intenta enfocar el problema de la dialéctica y por esta razón finaliza en las lógicas multivaluadas. Hasta el momento actual, el enfoque de las lógicas multivaluadas finalizó siempre en el punto en el cual comenzó. Son sumamente ilustrativas las palabras de Garret Birkhoff:

> Muchos de los sistemas estudiados en el pasado simplemente ordenan los grados de verdad que poseen las proposiciones. Todos los que me son conocidos emplean reticulados distributivos y por lo tanto uniones sub–directas de lógicas binarias. El autor no ve ninguna razón válida para poner este énfasis en un orden tan simple. Parece valer la pena construir el cálculo proposicional basado en reticulados, no distributivos, de valores lógicos, digamos de cinco elementos. En los intentos que he realizado para hacer esto me he visto obstaculizado por la dificultad de determinar, a partir de los valores lógicos de p y q, los valores de p Þ q y de p'.

Esta situación nace de un intento razonable –Birkhoff intuye con su olfato de matemático que el problema se encuentra en los reticulados de cinco elementos– pero sin una orientación real para estudiar el problema. Creemos que los que estudiaron el problema posteriormente les ocurrió lo mismo.

En este estudio el problema se plantea al revés: *existe la dialéctica en la naturaleza* y es necesario, por lo tanto, encontrar su expresión formal. Como consecuencia se llega a una lógica multivaluada. Hasta aquí esta todo claro. Pero el problema no finaliza con la simple formalización.

Una teoría científica, además de explicar lo conocido –en este caso algunas de las proposiciones del materialismo dialéctico– debe obtener resultados nuevos que puedan ser sometidos al riguroso examen científico. En esta obra hemos encontrado algunos resultados nuevos y existe la posibilidad de un juicio de la realidad.

Gödel demostró una mitad de un gran problema. En toda teoría formal, suficientemente rica para contener a la aritmética, se pueden formular proposiciones con propiedades lógicas singulares. Gödel se manejaba en los estrechos límites de la lógica booleana y declaró haber encontrado una proposición "no decidible". Para un dialéctico el resultado es diferente, en lugar de una proposición "no decidible" el resultado de Gödel se puede enunciar así:

> En toda teoría formal, suficientemente rica para contener la aritmética, existen proposiciones *dialécticas*.

Pero existe el problema inverso. Gödel nos muestra que la matemática conduce de la mano a la dialéctica. La dialéctica, a su vez, nos conduce en dirección contraria. El *devenir* es una parte esencial de la dialéctica y puede ser estudiado formalmente. Pues bien, los estudios no dialécticos del universo suelen conducir a teorías formales y esto no parece tener explicación. En un mundo dialéctico, las leyes físicas son esencialmente leyes de movimiento, enunciados en el devenir de las cosas. Porque estos enunciados de movimiento se convierten en enunciados deductivos. La respuesta que da la dialéctica formal es simple y directa: la función devenir, cuando se la simplifica demasiado, se convierte en la implicación booleana. La imagen de un universo con leyes deductivas es la imagen de un universo sobresimplificado en el cual el devenir de la materia se convierte en la implicación de las proposiciones.

–6–

En este trabajo se intenta una presentación formal de la dialéctica materialista desde un punto de vista algebraico. La idea básica es que algunos reticulados, unidos a definiciones convenientes, se corresponden estrechamente con las ideas dialécticas clásicas. Si bien este trabajo emplea un lenguaje algebraico, se ha hecho el intento de presentar una información lo más completa posible. Por esta razón se ha abundado en los ejemplos y la descripción de casos particulares. También se ha incluido la demostración de casi todos los enunciados, aún aquellos que son simples. Con esto se intenta facilitar la lectura de este tema que posee, por sí, una naturaleza interdisciplinaria.

No existe una forma universal de notación lógica, por esta razón se emplea una forma "técnica" de escritura que posee la suprema ventaja de la sencillez tipográfica y de no exigir caracteres especiales. Muchas otras veces se emplea una terminología vieja, clásica, anticuada dirán muchos. Esto es deliberado. Muchos puristas sabrán disimular este aspecto.

La presentación se encuentra dividida en varias partes. En la Primera Parte se introducen los reticulados básicos y la noción de negación. En la Segunda Parte se discute la trayectoria histórica de los reticulados dialécticos y su aplicabilidad para la comprensión lógica del Universo.

En la Tercera Parte se elabora la teoría de la implicación y se muestra que en la deducción dialéctica no se cumple uno de los axiomas clásicos. A partir de esta diferencia se analizan diferentes paradojas y se reinterpreta el resultado de Gödel.

En la Cuarta Parte se estudian las diferentes funciones lógicas de la dialéctica. En la Quinta Parte y se consideran las nociones de contradicción material y de penetración de los contrarios. Se analizan los problemas de los cuantificadores y de la dialéctica de predicados. Se discuten los temas del ser y del devenir dialéctico. Se llega así al punto esencial de la epistemología: la confusión que existe, en la lógica tradicional, entre implicación, causalidad y devenir.

El presente trabajo es solamente un paso inicial en la presentación formal de la dialéctica. Hay importantes puntos que todavía quedan sin respuesta y que el aporte de otras personas permitirá aclarar. Sin duda esta tarea será una obra colectiva.

–7–

Este libro es hijo de la dictadura. Si bien la intención de formalizar la dialéctica es una intención vieja y que en otras veces ya la había intentado, fue durante la dictadura que vivió el Uruguay en los últimos años cuando se desarrollaron y escribieron las ideas que aquí están expresadas. Valga también esta pequeña historia para ilustrar una vez más el carácter dialéctico de la realidad.

El presente estudio comenzó en 1974 y fue alimentado por la necesidad de una resistencia intelectual e ideológica a todo lo que representaba la dictadura. Con el alejamiento de los medios universitarios provocados por mi destitución fue necesario –para poder sobrevivir intelectualmente en el país– concentrarme en una tarea difícil, abstracta y que significara en los hechos una oposición sorda y sostenida. Fue entonces cuando surgió como natural ocuparme del viejo proyecto de formalización de la dialéctica.

El tema tenía una virtud práctica importante: resistía a los allanamientos y permitía tomar notas y estudiar libremente. Durante todos estos años los papeles y cuadernos que formaron los materiales de este trabajo recorrieron Montevideo y muchos rincones del país sin que sintiera ningún temor de transportarlos o de tenerlos conmigo. Quienes vivieron los momentos más oscuros de los últimos años, saben que esta cualidad estaba lejos de ser despreciable.

Montevideo, septiembre de 1985.

Parte 1: la negación

1.2 Introducción

Un estudio experimental de la lógica humana revela un panorama que posee una sorprendente amplitud. Aun dejando de lado las formas “genéticas” de desarrollo del pensamiento humano o las formas que pueden tipificarse como “patológicas”, queda todavía un enorme campo a explorar. Este campo se extiende desde las formas empleadas por filósofos del pasado –los Presocráticos, los creadores de los Upanishads, Lao Tsé, entre otros– hasta la dialéctica de Hegel en los tiempos modernos.

Para un materialista dialéctico el problema posee otro punto de vista. Puesto que la naturaleza obedece a leyes generales de la materia –las leyes de la dialéctica– a esta norma general no puede escapar la evolución del cerebro humano. Si es posible detectar el pensamiento lógico, tanto en el pasado histórico humano como en el presente cotidiano, otro tanto debe ocurrir con la dialéctica.

En el presente trabajo no se intenta realizar un análisis histórico, lingüístico o estructural del pensamiento humano. Tampoco se intenta mostrar que las estructuras presentadas aquí corresponden estrechamente a los planteos de los creadores del materialismo dialéctico. Esta tarea queda reservada para futuros trabajos. Lo que se intenta es presentar las estructuras de la lógica dialéctica en una formulación precisa y aceptable para los medios académicos. Todas los demás aspectos del problema se reducen a unas pocas notas que ilustren al lector interesado los puntos de contacto con los fundadores del materialismo dialéctico.

1.3 Lógica y reticulados

La vinculación estrecha que existe entre la lógica y las estructuras algebraicas conocidas como *reticulados* (lattices, treillis) ha sido puesta de manifiesto en muchas oportunidades diferentes. Sin animo de realizar una enumeración completa, pueden recordarse los casos:

- las lógicas booleanas
- las lógicas multivaluadas
- la epistemología genética de Piaget
- la lógica cuántica
- las lógicas multivaluadas de uso técnico

Las vinculaciones entre los reticulados y las lógicas booleanas son bien conocidas. Los primeros intentos de construir lógicas multivaluadas, realizados por Lukasiewicz y Tarski [1] [2] o Post [3], conducían a reticulados muy simples, con estructuras de cadenas. No debemos desconocer, sin embargo, que la formalización de la teoría de los reticulados recién ocurre entre 1933 y 1937, bastante después de estos primeros intentos de generalización. Posiblemente por su simplicidad, estos primeros intentos no progresaron todo cuanto hubieran podido.

En el estudio de la génesis del conocimiento que emprende Piaget encuentra en reiteradas ocasiones la noción de reticulado y esto le lleva a considerar estructuras intermedias, los *groupement*, entre los grupos y los reticulados, como formas de expresión de esta génesis [4]. Ya desde los comienzos de la formulación de la mecánica cuántica, Von Neumann y Birkhoff y otros autores [5] reconocieron la necesidad de expresar las relaciones lógicas que ocurren en algunos aspectos de la teoría con reticulados más complejos que los booleanos. En este caso particular, era la propiedad distributiva de la operación lógica “Y” la que sugería este camino. Sin embargo, estos intentos no se han concretado, hasta el presente, en resultados nuevos.

Los desarrollos modernos de la microelectrónica han conducido, en una forma natural, a lógicas multivaluadas con una aplicación técnica directa. Hay varias razones para proceder así. Los circuitos lógicos binarios, desde un punto de vista eléctrico, siempre fueron *ternarios*: a los valores clásicos de *nivel alto* y *nivel bajo* se agrega el tercer valor *no definido* o *no importa*. Nace así una lógica técnica ternaria [6]. Para el análisis de ciertos problemas reales se vuelve necesario considerar cuatro valores lógicos y agregar a los tres anteriores, el valor *circuito abierto* o *alta impedancia* [6] [7]; o aun reticulados más complejos. Finalmente, en los esfuerzos de miniaturización de las memorias se vuelve plausible el empleo de cuatro niveles lógicos en lugar de dos y nace así una aplicación nueva para una lógica multivaluada, en este caso booleana [8].

Todos estos antecedentes nos llevan de una manera natural a considerar a los reticulados como "el ambiente" de la lógica. En este hecho influye en forma decisiva la existencia de las operaciones lógicas ***Y*** y ***O*** como operaciones básicas de un reticulado. Sin embargo, para introducir una lógica en un reticulado –y aun más para formalizar a la lógica dialéctica– es necesario especializar los reticulados e introducir nociones nuevas. Este trabajo tiene como finalidad introducir las funciones y especializar los reticulados de modo de presentar "el ambiente de la dialéctica" y dar forma precisa –o tal vez, forma *algebraica*– a los enunciados de los clásicos del materialismo dialéctico y al pensamiento espontáneo del hombre.

Desde el punto de vista de la notación, emplearemos las siguientes convenciones, usadas en ambientes técnicos, para superar algunas dificultades tipográficas [3]:

- el punto "." representa la operación lógica ***Y***, la conjunción.
- el signo "+" representa la operación lógica ***O***, la disyunción.
- el ínfimo de un reticulado se representa con *0*, el valor falso.
- el supremo de un reticulado se representa con *1*, el valor verdadero.

Las demás convenciones empleadas se definirán a medida que sean introducidas en la exposición. Como referencia general a los reticulados se puede emplear el libro clásico de Birkhoff [9].

1.4 La negación

Como resultara de esta exposición, una lógica queda definida toda vez que se posee una *negación* en un reticulado. Investigaremos primero en que consiste una negación.

Para analizar este problema es necesario algunas precisiones. Puede parecer que una negación debe ser definida por su significado, pero no es así. Esta opinión se origina en una confusión de conceptos en que es muy fácil incurrir. La negación es una operación lógica y debe ser definida solamente por propiedades formales. Existen cuatro conceptos

[3] La notación tradicional para las operaciones lógicas es: $\neg$ para la negación, $\wedge$ para la conjunción y $\vee$ para la disyunción. En la matemática de los reticulados se emplea $\cap$ y $\cup$ para las dos operaciones (intersección y unión). Ninguna de estas notaciones se puede generalizar bien para la dialéctica.

dialécticos que se encuentran relacionados, pero que son diferentes. En primer lugar, existe el concepto de *negación*. En segundo lugar, existe el concepto de *contrarios lógicos*. En tercer lugar existe el concepto de *contrarios materiales*. Finalmente, para cerrar el panorama, existe el concepto de *penetración de contrarios* o de *unidad y lucha de contrarios*.

En las formulaciones imprecisas de la dialéctica se suelen confundir estas ideas diferentes. Un primer paso para precisar el contenido lógico consiste en separarlas. Nos ocuparemos en esta sección del significado de las dos primeras. Más adelante se aclaran los conceptos de contrarios materiales y de penetración de contrarios.

La noción más simple de introducir es la noción de contrarios lógicos. Esta noción es formal y bien conocida –si bien se suele emplear el nombre de *complemento* en lugar de contrario [9]:

Definición 3.1: Dos elementos a y b del reticulado **L** se dicen *contrarios lógicos* si cumplen:

$$a + b = 1 \qquad\qquad a \,.\, b = 0$$

donde 0 y 1 designan al ínfimo y al supremo del reticulado **L**.

La noción de negación extiende una idea desarrollada en la lógica booleana. La negación es una operación unaria, definida sobre todos los elementos del reticulado, que posee propiedades formales. Como la idea de negación es una de las ideas básicas de este trabajo, introduciremos con detalle estas propiedades.

Si tomamos un valor lógico y procedemos a fabricar sus sucesivas negaciones se obtiene una serie de valores lógicos que, en algún momento, debe cerrarse sobre si misma y conducir al valor lógico de partida. Esta exigencia traduce la propiedad de la doble negación que en la lógica booleana coincide con la afirmación y de la triple negación que en la dialéctica hegeliana conduce, de alguna manera, al punto de partida. Por esta razón, la negación es una operación unaria, con inversa.

Si x es un elemento del reticulado **L**, se empleara la siguiente notación:

- negación de $x = \boldsymbol{N}x$

- función inversa de $\mathbf{N} = \mathbf{N'}$

La exigencia de que la negación posea una inversa la caracteriza muy poco desde el punto de vista algebraico. La propiedad lógica fundamental de la negación, desde el punto de vista formal, es la *propiedad de De Morgan*. Es interesante observar que la propiedad de De Morgan existe en el castellano como hecho natural. En efecto, la negación de la frase "*o A o B*" es la frase "*ni A ni B*" que expresa la primera de las propiedades exigidas a la negación, si entendemos que *ni* es una manera de expresar *no y*.

Definición 3.2: La negación es una operación unaria, con inversa, que cumple con la propiedad de De Morgan:

$$\mathbf{N}(x + y) = \mathbf{N}x \,.\, \mathbf{N}y$$
$$\mathbf{N}(x \,.\, y) = \mathbf{N}x + \mathbf{N}y$$

En las lógicas técnicas suele omitirse la noción de negación. En los intentos de generalización de lógicas multivaluadas, la negación suele definirse en forma explícita, sin referencia a una propiedad formal. Es habitual, sin embargo, que estas definiciones cumplan con la propiedad de De Morgan a pesar que no se considerara que esta propiedad representa un aspecto esencial de la negación.

La propiedad de De Morgan define un anti–automorfismo en el reticulado. Indica que se posee una cierta "simetría" dentro de la estructura de los valores lógicos. Se vincula también con una propiedad de conservación del orden definido en el reticulado.

Definición 3.3: Una función $\mathbf{f}(x)$ definida en el reticulado **L** se llama *monótona* si para $x \leq y$ se tiene $\mathbf{f}(x) \leq \mathbf{f}(y)$; se llama *monótona inversa* si se tiene $\mathbf{f}(x) \geq \mathbf{f}(y)$.

También se suele hablar de *conservar* o *invertir* el orden en el reticulado como expresiones equivalentes a la monotonía. Con esta definición es posible formular el siguiente teorema:

Teorema 3.1: Toda negación $\mathbf{N}$, definida en un reticulado **L**, es una función *monótona inversa* (o que invierte el orden).

Demostración 3.1: Si una función cumple con la propiedad de De Morgan para dos valores lógicos que verifiquen:

$$x \leq y$$

se tiene, en forma elemental:

$$x + y = y$$
$$x \,.\, y = x$$

Aplicando la propiedad de De Morgan resulta:

$$\mathbf{N}x \,.\, \mathbf{N}y = \mathbf{N}y$$
$$\mathbf{N}x + \mathbf{N}y = \mathbf{N}x$$

y de cualquiera de estas expresiones resulta inmediato que:

$$\mathbf{N}x \geq \mathbf{N}y$$

tal como era necesario demostrar.

Hasta el momento no se ha establecido ninguna vinculación entre la *negación* y los contrarios *lógicos*. La vinculación que existe no es demasiado fuerte. No es imprescindible que la negación de un valor lógico conduzca a un elemento contrario lógico. Sin embargo se tiene:

Teorema 3.2: Toda negación cumple con:

$$\mathbf{N}0 = 1$$
$$\mathbf{N}1 = 0$$

Demostración 3.2: Sea x un elemento de **L** y sea $z = \mathbf{N'}x$, se tiene entonces:

$0 \,.\, z = 0$ luego, para todo x, es $\mathbf{N}0 + x = \mathbf{N}0$

Se deduce de aquí que $\mathbf{N}0$ coincide con 1. En forma dual se demuestra la otra igualdad.

Este resultado permite adelantar un paso en la interpretación de los valores lógicos de un reticulado. Podemos asimilar el supremo del reticulado, 1, al valor lógico "verdadero" y el ínfimo, 0, al valor lógico "falso" exactamente igual que en la interpretación binaria clásica. Con esta presentación, el sub–reticulado formado por 0 y 1, con cualquier negación, no se puede diferenciar de la lógica binaria tradicional. Mediante este argumento se comienza a interpretar el significado de los valores lógicos del reticulado. Las negaciones definidas se comportan respecto a los valores lógicos "verdadero" y "falso" en la forma esperada. Sin embargo, con los restantes valores lógicos no ocurre necesariamente así. El Teorema 3.1 también es válido en forma inversa:

Teorema 3.3: Si una transformación posee inversa e invierte el orden en un reticulado, es una negación.

Demostración 3.3: Consideremos dos elementos del reticulado y sea $\mathbf{N}x$ el transformado de x. Puesto que se tiene

$$x + y \geq x$$

aplicando la propiedad de monotonía se llega a

$$\mathbf{N}(x + y) \leq \mathbf{N}x$$

y al mismo resultado para y. De la monotonía del producto se tiene

$$\mathbf{N}(x + y) \leq \mathbf{N}x \,.\, \mathbf{N}y$$

En forma dual se demuestra

$$\mathbf{N}(x \,.\, y) \geq \mathbf{N}x + \mathbf{N}y$$

Consideremos ahora $\mathbf{N'}$, inversa de $\mathbf{N}$, que también es monótona, y apliquemos a $\mathbf{N}x$ y $\mathbf{N}y$ esta propiedad, resulta

$$\mathbf{N'}(\mathbf{N}x \,.\, \mathbf{N}y) \geq \mathbf{N'N}x + \mathbf{N'N}y = x + y$$

Apliquemos $\mathbf{N}$ a la fórmula, teniendo en cuenta la monotonía

$$\boldsymbol{N}x \,.\, \boldsymbol{N}y \leq \boldsymbol{N}(x + y)$$

Combinando los resultados, se obtiene una de las ecuaciones de De Morgan. En forma dual se obtiene la otra propiedad y queda demostrado que $\boldsymbol{N}$ es una negación.

El concepto de *automorfismo* está relacionado estrechamente con el concepto de negación: el automorfismo conserva el orden en el reticulado y la negación lo invierte. Por esta estrecha vinculación se puede demostrar un teorema similar al anterior.

Teorema 3.4: Si una transformación posee inversa y conserva el orden del reticulado es un automorfismo.

Demostración 3.4: Sea $\boldsymbol{A}$ la transformación y $\boldsymbol{A'}$ su inversa, ambas que conservan el orden. Puesto que se tiene para todo par de elementos del reticulado

$$x + y \geq x$$

sigue de la monotonía

$$\boldsymbol{A}(x + y) \geq \boldsymbol{A}x$$

En forma similar se obtiene

$$\boldsymbol{A}(x + y) \geq \boldsymbol{A}y$$

y por la monotonía de la suma, se tiene

$$\boldsymbol{A}(x + y) \geq \boldsymbol{A}x + \boldsymbol{A}y$$

Si aplicamos esta ecuación a $\boldsymbol{A'}$ sobre los valores $\boldsymbol{A}x$, $\boldsymbol{A}y$ se tiene

$$\boldsymbol{A'}(\boldsymbol{A}x + \boldsymbol{A}y) \geq \boldsymbol{A'A}x + \boldsymbol{A'A}y = x + y$$

y aplicando $\boldsymbol{A}$ a esta ecuación resulta

$$\boldsymbol{A}x + \boldsymbol{A}y \geq \boldsymbol{A}(x + y)$$

y de aquí, como resultado final

$$\boldsymbol{A}(x + y) = \boldsymbol{A}x + \boldsymbol{A}y$$

En forma dual se demuestra la ecuación del producto y queda demostrado el teorema.

Definición 3.4: Una negación $\boldsymbol{N}$ definida en el reticulado **L** se dice *negación estricta* si transforma todo elemento en un contrario, es decir, si se cumple para todo x las ecuaciones

$$x + \boldsymbol{N}x = 1$$
$$x \,.\, \boldsymbol{N}x = 0$$

Como veremos, en un mismo reticulado **L** pueden existir negaciones en sentido amplio y negaciones estrictas. Para el estudio de algunos problemas es importante realizar esta diferenciación. En la exposición que sigue se indicara a título expreso si una negación es en sentido estricto en el contexto que se la usa.

Definición 3.5: Se llama *grado* de una negación $\boldsymbol{N}$ al menor número de veces que es necesario aplicar $\boldsymbol{N}$ para obtener la transformación idéntica. El grado es un número par.

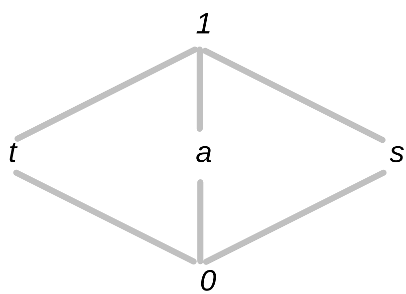


Figura 1: Ejemplo de reticulado (hegeliano o $\mathbf{D_3}$).

Puesto que una negación en **L** es una permutación de sus elementos, se puede emplear una notación similar a la empleada en los grupos de sustituciones. Consideremos el reticulado de la Figura 1 y la negación definida como: ***N****0 = 1*, ***N****1 = 0*, ***N****t = a*, ***N****a = s*, ***N****s = t*.

Empleando la notación de sustituciones, esta negación ***N*** se puede escribir como:

N = *(01)(tas)*

De esta manera se indica que *0* se transforma en *1* y recíprocamente, así como se indica que *t* se transforma en *a*, éste en *s* y éste en *t*. Cada lista encerrada en un paréntesis indica un ciclo cerrado. Si algún elemento no aparece, significa que es transformado en sí mismo por la operación.

En el reticulado de la Figura 1 se pueden definir 6 negaciones que corresponden a las 6 posibles permutaciones de los tres elementos *t, a, s*. Estas negaciones son:

(01)
(01)(ta)
(01)(ts)
(01)(as)
(01)(tas)
(01)(tsa)

Solamente las negaciones que permutan los tres elementos son negaciones en sentido estricto, de grado 6 e inversas una de la otra. Es interesante observar que existen negaciones –como ocurre con las cuatro primeras– que poseen elementos que *coinciden con su negación* y esto da lugar a la definición:

Definición 3.6: Un elemento *x* de un reticulado se llama *valor central* si existe una negación ***N*** de modo que se verifica la ecuación:

N*x = x*

Como es claro, si una negación tiene esta propiedad, no es una negación en sentido estricto. En el ejemplo de la Figura 1 los tres elementos, *t, a, s* son valores centrales. Por el contrario, en el reticulado de la Figura 7 no existen valores centrales.

Esta situación no es nueva en la lógica, porque ya las lógicas modales [2] poseían valores centrales. Tampoco es nueva para la dialéctica y así ocurre en las clásicas afirmaciones de Heráklito tales como:

58. Y uno son bien y mal.

59. En el batán el camino de la tuerca es recto y es curvo; más es uno y el mismo.

60. Camino hacia arriba, camino hacia abajo: uno y el mismo camino.

88. Una y la misma cosa son: viviente y muerto, despierto y dormido, joven y viejo; solo que, al invertirse unas cosas, resultan otras, y a su vez al invertirse esotras resultan las otras. [10]

En todos los casos se expresa la coincidencia entre una idea y la negación de esta idea. Este punto de vista de la dialéctica de Heráklito no ofrece ninguna dificultad en la lógica que estamos estudiando, aun en el caso extremo de que se tome la coincidencia en sentido estricto y literal.

Los valores centrales de un reticulado poseen algunas propiedades importantes. Para estudiarlas es conveniente introducir la noción de *nivel lógico*:

Definición 3.7: Dos elementos se dice que poseen *igual nivel lógico* si existe un automorfismo que transforma uno en otro.

Como es inmediato, la relación “igual nivel lógico” es una relación de equivalencia puesto que existe el automorfismo idéntico, el inverso y el producto de dos automorfismos. Podemos demostrar entonces:

Teorema 3.5: Si dos elementos de un reticulado poseen el mismo nivel lógico, entonces *no son comparables*.

Demostración 3.5: Sean a y b dos elementos que posen el mismo nivel lógico, lo cual quiere decir que existe un automorfismo $\boldsymbol{A}$ tal que:

$$b = \boldsymbol{A}\, a$$

Si estos elementos fueran comparables y se tuviera, por ejemplo:

$$a \ ^3\ b = \boldsymbol{A}\, a$$

puesto que $\boldsymbol{A}$ posee una potencia n para la cual es la transformación idéntica, se puede obtener la serie de desigualdades:

$$\boldsymbol{A}\, a \geq \boldsymbol{AA}\, a$$
...
$$\boldsymbol{A}^{n-1}\, a \geq \boldsymbol{A}^{n}\, a = a$$

Pero de aquí se deduce que a y b coinciden, con lo cual queda demostrado el teorema por absurdo.

Teorema 3.6: Si a es un elemento central del reticulado, todas sus negaciones poseen igual nivel lógico.

Demostración 3.6: Sea $\boldsymbol{N}_0$ la negación bajo la cual a coincide con su contrario y sea $\boldsymbol{N}$ una negación cualquiera. Es claro que:

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{N}_0\, \boldsymbol{N}'$$

es un automorfismo, por ser producto de dos negaciones. Pero entonces, puesto que se tiene:

$$a = \boldsymbol{N}_0\, a = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{N}a)$$

luego a es equivalente a $\boldsymbol{N}a$ tal como se debía demostrar.

1.5 La clasificación de las lógicas

Una lógica queda definida toda vez que se especifica un reticulado **L** y una negación $\boldsymbol{N}$. Nos ocuparemos en esta sección de una colección de reticulados y negaciones cuya caracterización imprecisa es que *poseen interés lógico*.

Las propiedades de la lógica dependen fuertemente del reticulado **L** y en una medida menor de la negación $\boldsymbol{N}$. Así por ejemplo, si **L** es un reticulado distributivo, es bien conocido que $\boldsymbol{N}$ posee la propiedad involutoria:

$$\boldsymbol{NN}x = x$$

Por esta razón, las lógicas de interés –diferentes de la Booleana– corresponden a reticulados *no distributivos*. Existe una buena evidencia de que en estos reticulados puede definirse –al menos– una negación en sentido estricto. Se trata entonces de reticulados *complementados*. También existe una cierta evidencia de que se pueden caracterizar por una propiedad de sus átomos pero, en el estado del presente trabajo, estas propiedades son solamente plausibles. En la exposición que sigue se analizaran los casos particulares más interesantes desde el punto de vista dialéctico.

Una propiedad importante para la construcción de una lógica es la de disponer de una estructura lo suficientemente rica como para que las funciones lógicas que se pueden construir comprendan a todas las funciones posibles. Las dos definiciones siguientes introducen las nociones relativas a las expresiones lógicas.

Definición 4.1: Una función $\boldsymbol{f}$ –de varias variables $x,y,...,z$– definida sobre el reticulado **L**, con la negación $\boldsymbol{N}$, se dice *función lógica* si se puede expresar mediante:

- los elementos de **L**
- las variables $x,y,...,z$
- los paréntesis
- las operaciones binarias de **L**, "+" "."
- la negación $\boldsymbol{N}$

Esta idea refleja la noción clásica de expresión lógica.

Definición 4.2: Una lógica definida en un reticulado **L**, con una negación $\boldsymbol{N}$, se dice que es una *lógica completa* si toda función definida en **L** se puede expresar como una función lógica.

Esta idea generaliza el teorema de que las expresiones lógicas agotan todas las funciones en la lógica booleana binaria. Es interesante observar que es indispensable contar con una negación para poder construir todas las funciones posibles. Es bien conocido que las funciones polinómicas, de cualquier número de variables, definidas en un reticulado son funciones monótonas [9], de modo que sin auxilio de alguna función que altere el orden, no es posible expresar la totalidad de las funciones de un reticulado. Este papel lo cumple la negación en las Definiciones 4.1 y 4.2.

Con estas definiciones es muy sencillo obtener algunos resultados de aplicación inmediata. Existen reticulados que para *ninguna* negación permiten fabricar una lógica completa. El caso más simple y más interesante es el propio caso booleano y el resultado se expresa en el siguiente teorema:

Teorema 4.1: En toda lógica booleana de orden n, mayor que 1, existen funciones que no son lógicas.

Demostración 4.1: Consideremos todas las funciones lógicas de una variable x. Puesto que se puede aplicar la propiedad distributiva y las propiedades de De Morgan, toda función lógica se puede expresar como:

$$\mathbf{f}(x) = p.x + q.\mathbf{N}x + r$$

donde p,q,r pertenecen al reticulado booleano de orden n. Luego existen, *a lo sumo*:

$$2^n.2^n.2^n = 2^{3n}$$

funciones lógicas diferentes puesto que el reticulado booleano de orden n posee solamente 2^n elementos. Por otro lado, el número de funciones posibles, definidas mediante tablas de verdad sobre 2^n elementos con 2^n posibles elecciones es 2 elevado a $n2^n$. Esto hace que el número de funciones posibles es mayor que el número de funciones lógicas siempre que se cumpla:

$$3n < n.2^n \text{ o sea para } 2^n > 3 \text{ o sea para } n > 1$$

tal como se debía demostrar.

Es bien conocido que la lógica booleana binaria es una lógica completa; el Teorema 4.1 muestra que es el único caso booleano en el cual esto ocurre. Esta es una de las razones por la cual las lógicas booleanas diferentes de la binaria no poseen demasiada importancia.

Si la pareja **L**,***N*** define una lógica completa, puesto que una negación es una función definida en **L**, cualquier otra negación definida en **L** puede ser expresada como una función lógica, con auxilio de ***N***. De acuerdo con esto, basta considerar una negación sobre **L** que genere una lógica completa para tener definidas todas las demás negaciones como funciones lógicas.

La posibilidad de que un reticulado posea una lógica completa depende de la estructura del reticulado. Existen algunas situaciones en las cuales es fácil resolver el problema. Los Teoremas 4.2 y 4.3 muestran dos situaciones sencillas y de utilidad.

Teorema 4.2: La lógica definida por la pareja **L**,***N*** es completa si y solamente si se puede construir, para cada elemento a de **L**, una función lógica $\boldsymbol{U}(x,a)$, de una variable x, tal que:

$\boldsymbol{U}(x,a) = 1$ para $x=a$
$\boldsymbol{U}(x,a) = 0$ para todo x diferente de a

Las funciones $\boldsymbol{U}(x,a)$ se llaman *funciones unidad* de **L**.

Demostración 4.2: Si la lógica es completa, es claro que se puede construir cualquier función lógica y, en particular, las funciones $\boldsymbol{U}(x,a)$. Por el contrario, una vez construidas todas las funciones $\boldsymbol{U}$, se puede construir cualquier otra función mediante las operaciones lógicas de **L**. Supongamos, para fijar las ideas, que se desea construir una función de dos variables x,y, que valga c para $x=a$ e $y=b$ y 0 en los demás casos. Esta función posee la expresión

$$\boldsymbol{f}(x,y) = c.\boldsymbol{U}(x,a).\boldsymbol{U}(y,b)$$

y se puede construir mediante las operaciones lógicas elementales y las funciones unidad. Para fabricar una función con una tabla de verdad cualquiera basta con sumar funciones del tipo indicado para cada una de las parejas de valores de x e y y cada uno de los valores de la tabla de verdad.

Teorema 4.3: Un reticulado **L** no es de lógica completa, cualquiera sea la negación elegida, si existe un homomorfismo no trivial, es decir, si existe un reticulado **L'** y una correspondencia tal que:

- todo elemento a de **L** posee una imagen a' en **L'**
- el correspondiente de $a+b$ es $a'+b'$ y el de $a.b$ es $a'.b'$
- al menos dos elementos u y v de **L** se transforman en el mismo elemento $u'=v'$ de **L'**
- **L'** no es trivial y posee más de un elemento

Demostración 4.3: Se puede demostrar en forma sencilla que una negación $\boldsymbol{N}$ en **L** se convierte en una negación en **L'**. Como consecuencia, es claro que toda función lógica en **L** genera una función lógica en **L'**. Si **L** fuera de lógica completa, entonces se podría construir una función lógica $\mathbf{f}(x)$ tal que:

$$\mathbf{f}(u) = 1$$
$$\mathbf{f}(v) = 0$$

Pero entonces, la función lógica $\mathbf{f}'(x')$ debería tomar el mismo valor sobre u' y v' con lo cual resultaría $1'=0'$ y **L'** sería un reticulado trivial, en contra de la hipótesis.

Los dos teoremas permiten resolver muchas situaciones interesantes. El Teorema 4.2 es de gran ayuda para demostrar que un reticulado posee una lógica completa. El Teorema 4.3 permite obtener muchos resultados negativos. Así por ejemplo, es una aplicación inmediata del Teorema 4.3 el siguiente resultado:

Teorema 4.4: Sobre un reticulado que es una *cadena* no es posible definir ninguna negación de modo de obtener una lógica completa, excepto para la cadena que coincide con el reticulado booleano binario.

La demostración es inmediata, porque existen homomorfismos en las condiciones del Teorema 4.3. Este resultado es de importancia al estudiar diferentes familias de lógicas.

Existe un conjunto de reticulados y de negaciones que poseen interés directo en este trabajo. Las siguientes definiciones introducen estos casos. A efectos de completar la notación, se designara como $\mathbf{B}^n$ al reticulado booleano de orden n.

Definición 4.3: Se llama reticulado de Lukasiewicz–Post de orden n, $\mathbf{C}_n$, a la cadena de n elementos. Los elementos se designan:

$p/(n-1)$, con $p=0,\ldots,n-1$

es decir, n racionales entre 0 y 1. La única negación $\boldsymbol{N}$ que existe posee la propiedad:

$$\boldsymbol{N}\, p/(n-1) = (n-p+1)/(n-1)$$

Esta lógica se encuentra definida en [1] [2] [3]. En la lógica ternaria de H. Reichenbach [5] [11] se consideran tres funciones que se llaman negaciones, sobre el reticulado $\mathbf{C}_3$. La función “cíclica” intercambia todos los elementos y es similar a la primera de las funciones negación que introduce Post [3] en $\mathbf{C}_n$. Evidentemente no se cumple con la propiedad de De Morgan. La “negación completa” de Reichenbach *carece de función inversa* y tampoco cumple con De Morgan. Finalmente, la “negación diametral” es una negación según la Definición 3.2. Tanto Lukasiewicz [1] como Post [3], en su segunda definición, coinciden con la Definición 4.3 de negación en $\mathbf{C}_n$.

Definición 4.4: Se llama reticulado *dialéctico simple* de orden n, $\mathbf{D}_n$, al reticulado formado por los elementos $0,1$ y n elementos todos contrarios lógicos entre sí.

Los reticulados dialécticos simples poseen una importancia muy grande en este trabajo. Por definición, ocurren las siguientes identificaciones:

- $\mathbf{D}_0$, dialéctico de orden 0, coincide con $\mathbf{B}$, booleano binario.
- $\mathbf{D}_1$, dialéctico de orden 1, coincide con $\mathbf{C}_3$, la lógica *modal*.
- $\mathbf{D}_2$, dialéctico de orden 2, coincide con $\mathbf{B}^2$, booleano de orden 2. Más adelante se lo denomina también reticulado *Yin–yang*.
- $\mathbf{D}_3$, dialéctico de orden 3, presentado en la Figura 1, se denomina

también reticulado de *Hegel* y es el caso básico de la lógica dialéctica.

En lo que sigue se analizan algunas otras vinculaciones de los reticulados dialécticos simples, así como su aplicación histórica a la lógica. La noción de reticulado dialéctico simple se puede extender a casos más generales:

Definición (imprecisa) 4.5: Se llama reticulado dialéctico compuesto o complejo o simétrico, de orden n y rango r, $\mathbf{rD}_n$, al reticulado formado por los elementos $0,1$ y r grupos de n elementos. En cada cadena que une 0 con 1 hay r elementos intermedios. En la figura 1a se ilustra un ejemplo del caso general.

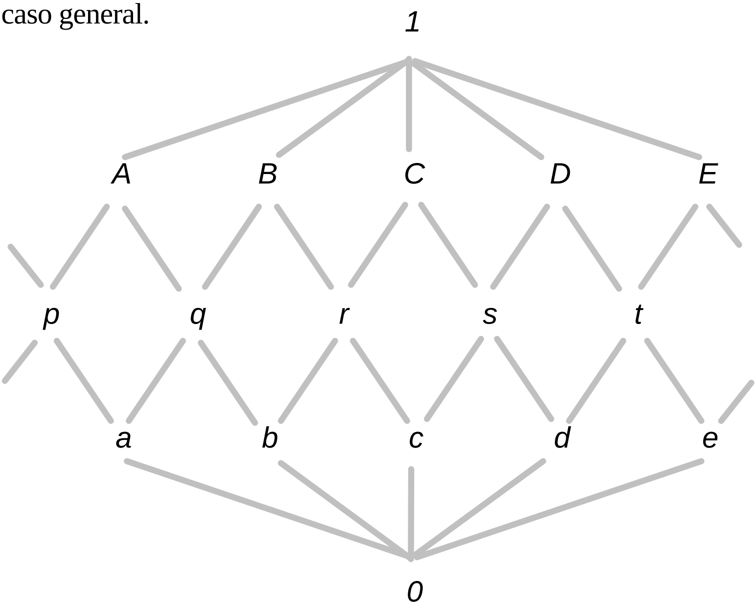


Figura 1a: Reticulado dialéctico $\mathbf{3D_5}$ que ilustra el caso general. [4]

[4] Esta figura y esta conceptualización no se encontraba en la publicación original. Por esta razón algunos de las propiedades de estos reticulados no se demuestran y solamente se sugiere el camino de la demostración. La definición precisa de este reticulado se realiza a partir de las relaciones que cumple un elemento genérico x_{ij} con sus vecinos próximos: $x_{i+1j} = x_{ij} + x_{ij+1}$ y la relación dual. Los índices se consideran módulo n.

En este trabajo se analiza la generalización inspirada en el caso presentado en la Figura 7, identificado como el reticulado $\mathbf{2D_4}$. Los reticulados dialécticos simples pueden ser considerados como reticulados de rango *1* y de allí que se tenga $\mathbf{D_n}=\mathbf{1D_n}$.

El reticulado general posee las propiedades siguientes:

- Posee *n* átomos.
- Existe una rotación de los elementos que transforma el reticulado sobre sí mismo.
- Todo elemento *x* es igual a la suma de los átomos del reticulado que le son menores [5].
- Posee varias negaciones, incluyendo negaciones estrictas.
- Es reticulado, para $n > r + 1$ es de lógica completa [6].

Esta definición generaliza bien el concepto de reticulado dialéctico simple y es lo suficientemente rica como para permitir demostrar una gran cantidad de propiedades. Vale la pena señalar que estos reticulados *no son modulares* necesariamente; precisamente el reticulado de la Figura 7 no lo es. En cambio la segunda propiedad, que podemos llamar la propiedad de suma de átomos, es una propiedad similar pero menos fuerte que la propiedad modular.

Los reticulados dialécticos poseen una gran cantidad de propiedades interesantes para la lógica. Presentaremos algunas de las que tendrán más utilidad.

Teorema 4.5: Todo reticulado dialéctico simétrico posee *n* máximos y todo elemento *x* del reticulado se puede expresar como producto de los máximos que son mayores que él.

Demostración 4.5: Puesto que el reticulado posee una negación, la imagen

[5] Esta propiedad es una consecuencia inmediata de la estructura del reticulado.

[6] Si $n=r+1$ es posible clasificar los elementos en dos conjuntos: uno formado por *r* átomos, todas sus sumas posibles y *1*; el otro formado por *0*, el átomo restante y todos los de más elementos. Existe un homomorfismo de estos dos conjuntos sobre el reticulado **B**. También puede demostrarse lo mismo por el teorema 4.6. El teorema 4.9 y siguientes demuestran las demás condiciones.

de un átomo es un máximo y recíprocamente, luego se pueden poner en correspondencia biunívoca y existen, por lo tanto, n máximos. Sea ahora $y=\mathbf{N}'x$, por la propiedad de suma de átomos se puede escribir:

$$y = a + b + ...$$

como suma de los átomos mayores que y. Si se aplica la negación $\mathbf{N}$ a esta ecuación se tiene:

$$x = A\ .\ B\ .\ ...$$

donde A, B, son las negaciones de los átomos, es decir los máximos mayores que x.

Teorema 4.6: En todo reticulado dialéctico simétrico, dado un átomo existe un máximo que es contrario lógico y recíprocamente.

Demostración 4.6: Sea A un máximo. Debe existir al menos un átomo a que no sea menor que A porque de otro modo A sería el supremo del reticulado. Este átomo tiene la doble propiedad que define los contrarios lógicos:

$$a\ .\ A = 0$$
$$a + A = 1$$

En forma dual, aplicando la existencia de una negación, se tiene el resultado dual.

Es interesante observar que tanto los automorfismos como las negaciones quedan determinadas por lo que ocurre con los átomos y los máximos, tal como indica el siguiente teorema.

Teorema 4.7: En todo reticulado dialéctico simétrico los automorfismos y las negaciones quedan determinados por las transformaciones de los átomos entre sí o de los átomos en los máximos respectivamente.

Demostración 4.7: Consideremos un automorfismo, es claro que queda definida una transformación que a cada átomo a_i le corresponde un átomo a_j. Recíprocamente, toda vez que se conoce la correspondencia entre átomos, por la propiedad de suma, queda determinada una transformación única en el reticulado. En el caso de una negación queda establecida una correspondencia entre un átomo a_i y un máximo A_j. En forma recíproca, conocida esta correspondencia, por el Teorema 4.5, queda determinada una correspondencia entre todos los elementos del reticulado.

Es importante advertir que el Teorema 4.7 no establece que cualquier correspondencia sea un automorfismo o una negación, solamente establece que los automorfismos son isomorfos a un subgrupo de sustituciones de n elementos y que las negaciones lo son de un subgrupo de sustituciones entre dos familias de n elementos.

Definición 4.7: Se llama reticulado dialéctico *simétrico* a un reticulado dialéctico que posee un automorfismo $\boldsymbol{R}$ isomorfo a la rotación de n elementos. [7]

Como consecuencia de la Definición 4.7 y del Teorema 4.7, el automorfismo establece la rotación de los átomos. A todos los efectos podemos suponer que los átomos están numerados de 1 a n y que $\boldsymbol{R}$ realiza el giro del conjunto. Como es claro, existen $n–1$ rotaciones adicionales por aplicación sucesiva de $\boldsymbol{R}$, la ultima de las cuales coincide con la identidad. De acuerdo con esto, el grupo de automorfismos de un reticulado dialéctico simétrico incluye un subgrupo cíclico de orden n.

Definición 4.8: Se llama *rango* de un reticulado dialéctico simétrico al número de átomos menores que cada máximo del reticulado. [8]

La definición de rango establece el número de elementos que posee el reticulado entre 0 y 1 tal como sugería la Definición 4.5. Puesto que el reticulado es simétrico, todos los máximos poseen el mismo número de átomos y este número r cumple con:

$$r < n$$

puesto que la suma de todos los átomos es, necesariamente, 1. El caso

---

[7] Esta definición es inútil, se la conserva a los efectos de no alterar la numeración de la publicación original.
[8] También esta definición es inútil y se la conserva por la misma razón.

$r=n-1$ corresponde precisamente a un reticulado isomorfo a **B**.

Teorema 4.8: En todo reticulado dialéctico simple, de grado mayor que 2, se puede construir la función $\mathbf{U}(x,1)$.

Demostración 4.8: El reticulado posee tres átomos a,b,c tales que son contrarios entre sí, puesto que posee grado por lo menos 3. Entonces se puede construir la función $\mathbf{U}(x,1...)$ con la expresión:

$$\mathbf{U}(x,1) = (a.x+b).(a.x+c).(b.x+a).(b.x+c)$$

Consideraremos todos los casos posibles de x y calcularemos el valor de la expresión. Para x diferente de a y de b, puesto que $x.a=0$ y $x.b=0$, se tiene:

$$\mathbf{U}(x,1) = b.c.a.c = 0$$

Para x igual a a, puesto que $x.a=a$ y $x.b=0$, se tiene:

$$\mathbf{U}(x,1) = (a+b).(a+c).a.c = 0$$

Puesto que la función es simétrica en a,b, también es válida la situación simétrica para $x=b$. Para $x=1$ se tiene:

$$\mathbf{U}(1,1) = (a+b).(a+c).(b+a).(b+c) = 1$$

Queda entonces demostrado el resultado.

Teorema 4.9: En todo reticulado dialéctico simétrico, con rango $r<n-1$, se puede construir la función $\mathbf{U}(x,1)$.

Demostración 4.9: Sea A un máximo del reticulado. Por la condición de rango, este máximo posee al menos dos átomos contrarios lógicos. En efecto, consideremos los r átomos que son menores que A. Por la desigualdad del rango existen por los menos dos átomos fuera de este conjunto y por la manera que fueron obtenidos, son contrario lógicos. Sean b y c estos átomos contrarios lógicos de A. Entonces se puede construir la función:

$$(A.x + b) \,.\, (b.x + A) \,.\, c$$

Estudiemos los valores de esta función en todos los casos posibles para la variable. Si $x=1$ la función vale:

$$(A + b) \,.\, (b + A) \,.\, c = c$$

Si $x \leq A$ la función vale:

$$(x + b) \,.\, A \,.\, c = 0$$

Si x no es comparable con A, la función vale:

$$b \,.\, (b + A) \,.\, c = 0$$

Consideremos ahora la función construida y todas sus rotaciones aplicando el automorfismo $\mathbf{R}$ en forma reiterada. La suma de estas n funciones es la función unitaria buscada puesto que para x diferente de 1 vale 0 y para $x=1$ es la suma de todos los átomos del reticulado, es decir, vale 1. Con esto queda demostrado el teorema.

Es interesante observar que la condición del rango del Teorema 4.9 *excluye* precisamente el caso booleano. Como ya sabemos, en el caso booleano no se tiene una lógica completa y la clave para la demostración de este resultado se encuentra precisamente en la existencia de esta función unitaria.

Teorema 4.10: La función unitaria $\mathbf{U}(x,0)$ posee la siguiente expresión:

$$\mathbf{U}(x,0) = \mathbf{U}(\mathbf{N}x,1)$$

Demostración 4.10: Es claro que $\mathbf{U}(\mathbf{N}x,1)$ vale 1 solamente cuando $\mathbf{N}x=1$, por definición. Luego, solamente cuando $x=0$, como era necesario demostrar.

La función $\mathbf{U}(x,1)$ puede construirse como un polinomio porque conserva el orden. En cambio, para construir la función $\mathbf{U}(x,0)$ es necesario introducir una negación. Como ya sabemos, no es posible construirla sin auxilio de una función que altere el orden, la negación en este caso.

Teorema 4.11: Todo reticulado dialéctico simétrico, de rango $r<n-1$, es de lógica completa para toda negación.

Demostración 4.11: Por los Teoremas 4.8, 4.9 y 4.10 sabemos que podemos construir las funciones unitarias para 0 y para 1. Estas funciones se pueden escribir, por sencillez de notación como:

$$\mathbf{u}(x) = \mathbf{U}(x,1)$$
$$\mathbf{z}(x) = \mathbf{U}(x,0) = \mathbf{U}(\mathbf{N}x,1)$$

En el caso dialéctico simple, la función unitaria $\mathbf{U}(x,m)$ se puede expresar como:

$$\mathbf{U}(x,m) = \mathbf{N}\ (\ \mathbf{z}(m.x) + \mathbf{u}(m+x)\ )$$

En efecto, si $x=m$, $\mathbf{z}(m)=\mathbf{u}(m)=0$ luego la función vale 1. Si x es diferente de m, se tiene:

$m.x=0$ luego $\mathbf{z}(m.x)=1$

$m+x=1$ luego $\mathbf{u}(m+x)=1$

entonces la función vale cero. Queda demostrado el teorema para el caso dialéctico simple. En el caso compuesto se emplea la expresión:

$$\mathbf{U}(x,m) = \mathbf{N}\ (\ \mathbf{z}(a_1.x)+...+\mathbf{z}(a_p.x)+\mathbf{u}(A_1+x)+...+\mathbf{u}(A_q+x)\ )$$

donde a_i y A_i son respectivamente los átomos menores que m y los máximos superiores a m. Para que la suma valga 0 debe ocurrir que todos sus sumandos valgan cero. Esto ocurre si se cumplen simultáneamente que todos los productos $a_i.x$ son diferentes de cero y todas las sumas A_i+x son diferentes de 1. Puesto que los a_i son átomos, es necesario que se cumplan las ecuaciones:

$$a_1.x=a_1$$
$$a_2.x=a_2$$

$$\dots$$
$$a_p.x=a_p$$

de donde se deduce que x es mayor o igual que cada uno de los a_i y de allí que se cumpla:

$$x \geq a_1+a_2+\dots+a_p$$

Puesto que los A_i son supremos, es necesario que se cumplan las ecuaciones:

$$A_1+x=A_1$$
$$A_2+x=A_2$$
$$\dots$$
$$A_q+x=A_q$$

de donde se deduce que x es menor o igual que cada uno de los A_i y de allí que se cumpla:

$$x \leq A_1.A_2\dots A_q$$

De las dos desigualdades obtenidas, de la propiedad de suma de átomos y del Teorema 4.5 resulta:

$$a_1+a_2+\dots a_p=m \leq x \leq m=A_1.A_2\dots A_q$$

o sea, la suma solamente puede ser nula cuando x coincide con m. La negación de la suma, solamente puede valer 1 cuando x coincide con m.

Por otra parte, la suma considerada, por contener solamente funciones $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{z}$, solamente puede valer 0 o 1, de modo que toda vez que no vale 0, vale 1. De acuerdo con esto, cuando x no coincide con m, la suma vale 1 y su negación vale 0. En los Teoremas 4.10 y 4.11 solamente se emplea la propiedad de la negación del Teorema 3.2. Por esta razón, *toda* negación $\boldsymbol{N}$ cumple con estos teoremas. Se completa así la demostración del teorema.

La colección de reticulados definidos comprende los casos de interés que se mencionaban al principio de esta sección. No puede decirse que no existan otros casos interesantes no considerados. A efectos de visualizar correctamente las relaciones mutuas se puede presentar un diagrama bidimensional conveniente. Se han coloreado de gris los reticulados que no son de lógica completa y que poseen, por lo tanto, una imagen homomorfa más simple.

$\mathbf{B}$					
$\mathbf{C_3 = D_1}$	$\mathbf{B^2 = D_2}$	$\mathbf{D_3}$	$\mathbf{D_4}$	$\mathbf{D_5}$	…
$\mathbf{C_4}$	$\mathbf{B^3}$	$\mathbf{2D_3}$	$\mathbf{2D_4}$	$\mathbf{2D_5}$	…
$\mathbf{C_5}$	$\mathbf{B^4}$	$\mathbf{2D_4}$	$\mathbf{3D_4}$	$\mathbf{3D_5}$	…
$\mathbf{C_6}$	**…**	$\mathbf{2D_5}$	$\mathbf{3D_5}$	$\mathbf{4D_5}$	…
…	**…**	**…**	**…**	**…**	…

En este cuadro se relacionan los diferentes reticulados. A medida que nos desplazamos en sentido horizontal, aumenta el grado de las posibles negaciones que existen. A medida que nos desplazamos en la vertical, aumenta el rango y es posible disponer de más valores lógicos entre el "falso" y el "verdadero".

Es muy importante observar el papel de la negación dentro de una lógica. Para fijar las ideas consideremos el reticulado $\mathbf{D_3}$ y las negaciones que posee (ver la Sección 3). Si elegimos la negación:

N *= (01)*

la lógica que obtenemos no puede diferenciarse en nada esencial de la lógica binaria clásica. En cambio si elegimos la negación:

N *= (01)(ta)*

la lógica obtenida no se diferencia en nada esencial de $\mathbf{B_2}$. Solamente las dos negaciones estrictas de este reticulado generan una lógica verdaderamente nueva. Por extensión, dentro de cada reticulado $\mathbf{D}_n$, con una adecuada elección de la negación, se puede construir una lógica coincidente con otra lógica dialéctica de menos elementos. Este resultado posee importancia a los efectos de interpretar la multiplicidad de negaciones en un reticulado.

1.6 La generalización de la lógica

Antes de continuar con la fundamentación de la dialéctica, es conveniente detenerse en algunos puntos de la interpretación de las estructuras ya obtenidas. En las secciones siguientes se presentan argumentos de carácter histórico que completaran este panorama.

Desde el comienzo del trabajo se supuso que existía una correspondencia directa entre el supremo del reticulado, que representábamos como *1*, y el valor lógico "verdadero". Del mismo modo se tomo el valor lógico "falso" como *0* y coincidente con el ínfimo del reticulado. Todo esto se complementa con la siguiente definición:

Definición 5.1: Se llama valor *dialéctico* a todo valor lógico diferente de *0* y de *1*.

Los valores dialécticos son valores lógicos intermedios entre "verdadero" y "falso". Con carácter general se puede decir que representan grados intermedios de verdad o de falsedad. Algo más adelante se suministran ejemplos de interpretación de estos casos. Históricamente, en las lógicas modales, al valor intermedio de $\mathbf{C_3}$ se le llamaba "hipotético" –Lukasiewicz [2]– o "indeterminado" – Reichenbach [11]– del mismo modo que en las lógicas técnicas se introducían valores diferentes de "verdadero" y "falso".

El cálculo proposicional se puede generalizar de inmediato. Sin embargo es necesario diferenciar algunos tipos adicionales de proposiciones. Una expresión puede ser de diferentes tipos:

Definición 5.2: Una expresión lógica de varias variables, según sea el valor lógico que tome para los diferentes valores de sus variables, se llama:

- *tautología* si vale *1* siempre
- *falsedad* si vale *0* siempre
- *tesis* si no vale *0* nunca
- *tesis estricta* si solamente toma valores dialécticos
- *indeterminada* en los demás casos

Estas nociones generalizan los casos conocidos de la lógica binaria. Con los elementos que ya disponemos se pueden obtener algunos resultados de aplicación inmediata. Comencemos por un resultado muy general que marca una de las principales diferencias entre la lógica binaria y la lógica dialéctica:

Teorema 5.1: Toda negación de una tesis estricta es una tesis estricta.

Demostración 5.1: Este teorema es equivalente a afirmar que toda negación convierte un valor dialéctico en un valor dialéctico. Esto es consecuencia de que $\boldsymbol{N}$ es una operación con inversa y del Teorema 3.2.

En cambio, continua siendo cierto que la negación de una tautología es una falsedad y recíprocamente. No es posible afirmar nada acerca de la negación de una tesis que no sea estricta. Se puede demostrar, con carácter general, una tesis de muchas consecuencias:

Teorema 5.2: En todo reticulado, para todo x,y,z y toda negación $\boldsymbol{N}$, es una tesis:

$$x + y + z.\boldsymbol{N}x + \boldsymbol{N}z.\boldsymbol{N}y$$

Demostración 5.2: Basta con hallar las condiciones en las cuales sea 0. Para que la expresión sea 0, deben ser 0 todos los sumandos y de allí que se tengan que cumplir las ecuaciones:

$$x = 0$$
$$y = 0$$
$$z.\boldsymbol{N}x = 0$$
$$\boldsymbol{N}z.\boldsymbol{N}y = 0$$

Reemplazando las dos primeras ecuaciones en las restantes, resulta:

$$z = 0$$
$$\boldsymbol{N}z = 0$$

que carecen de solución en todo reticulado, para toda negación. Queda demostrado entonces que no existe ninguna terna de valores para la cual vale 0 la expresión, luego se trata de una tesis.

Es interesante observar que si bien se puede demostrar que se trata de una tesis, no se puede refinar más este resultado. Así por ejemplo, para la lógica booleana, esta expresión es una tautología; en cambio, para el reticulado $\mathbf{D}_3$, ***N****=(01)(tas)* y los valores *x=t*, *y=t*, *z=s*, la expresión vale *t*. El resultado del Teorema 5.2 es importante por algunas de sus consecuencias:

Teorema 5.3: Las siguientes expresiones son tesis, para cualquier reticulado y cualquier negación:

x + ***N****y* + *y*.***N****x*
x + *y*.***N****x* + ***N****x*.***N****y*
x + ***N****x*
N *(x* . ***N****x)*

Demostración 5.3: Se obtienen del Teorema 5.2 mediante cambios de variable apropiados.

Los resultados del Teorema 5.3 son sumamente expresivos a pesar de su sencillez. Según los lógicos tradicionales, el tercer enunciado se lo llama “principio del tercero excluido” porque expresa que *x* **o** ***N****x es una tesis*. Más aun, si ***N*** es una negación estricta, este enunciado es una tautología, aun en lógicas donde no se puede sostener ninguna idea semejante a la de “tercero excluido”. Esta interpretación es un abuso formal sugerido por los “principios lógicos” tradicionales.

El cuarto enunciado posee un carácter similar. Se suele llamar “principio de contradicción” porque expresa que *no es una tesis que x* **y** ***N****x* *sean simultáneamente válidos*. También en el caso que ***N*** sea una negación estricta, esta expresión es una tautología, aun en lógicas para las cuales esta interpretación sea claramente abusiva. Nuevamente son los enunciados tradicionales imprecisos los que fuerzan interpretaciones lógicas equivocadas.

Los resultados presentados muestran que se puede construir una lógica *proposicional* muy general, a partir de las ideas de negación y de función lógica. Por el momento nos quedan dos puntos fundamentales a tratar: la interpretación de los *valores dialécticos* y la teoría de la *implicación*. Estos puntos serán postergados hasta disponer de otros elementos.

Las negaciones son funciones unarias con inversa. Como funciones sobre un reticulado, puede ser compuestas. Las propiedades de composición que poseen dan origen a un grupo que se vincula con las propiedades lógicas en forma estrecha.

Definición 5.3: Se llama *grupo de las negaciones* de un reticulado **L** –que designaremos como $\mathbf{G_N}$– al grupo generado por la totalidad de las negaciones y sus productos sucesivos. Por producto se entiende la aplicación reiterada de la función considerada.

Como es inmediato, esta estructura es un grupo. Contiene tres tipos de elementos diferenciados: negaciones en sentido amplio, negaciones en sentido estricto y automorfismos. Si bien el concepto de automorfismo es muy claro y natural, es conveniente recordar la definición que se aplica en este contexto.

Definición 5.4: Un *automorfismo* en un reticulado **L** es una función, con inversa, que conserva las operaciones lógicas "." y "+".

De inmediato se obtienen un conjunto de propiedades muy simples del grupo $\mathbf{G_N}$:

Teorema 5.4: La composición de negaciones posee las siguientes propiedades:

- la inversa de una negación (estricta) es una negación (estricta) en **L**.
- el producto de un número par de negaciones es un automorfismo en **L**; el producto de un número impar de negaciones (estrictas o no) es una negación en **L**.
- la totalidad de las negaciones de **L** se puede obtener como el producto de una negación fija $\boldsymbol{N}$, por cada uno de los automorfismos de **L**. De aquí resulta que en el reticulado booleano de orden n hay $n!$ negaciones, pero la única estricta es la empleada habitualmente.
- si $\boldsymbol{N}_1$ y $\boldsymbol{N}_2$ son dos negaciones en **L** y $\boldsymbol{N}_2$ es estricta, entonces $\boldsymbol{N}_1'.\boldsymbol{N}_2.\boldsymbol{N}_1$ también es una negación estricta en **L**.

Haciendo referencia más directa a la estructura de grupo de $\mathbf{G_P}$ se puede enunciar el siguiente teorema, también de demostración inmediata:

Teorema 5.5: En todo grupo $\mathbf{G_P}$ se cumplen las siguientes propiedades:

- el conjunto de los automorfismos es un subgrupo normal, designado como $\mathbf{G_A}$, del grupo $\mathbf{G_P}$.
- el grupo $\mathbf{G_{NE}}$ generado por las negaciones estrictas es un subgrupo normal de $\mathbf{G_N}$.

Para los reticulados dialécticos simétricos se pueden obtener algunos resultados particulares de interés en el estudio de estos grupos.

Teorema 5.6: En todo reticulado dialéctico, simétrico, existe una negación estricta.

Demostración 5.6: Consideremos primero el caso dialéctico simple. El teorema es inmediato porque una rotación de todos los valores dialécticos es una negación estricta. En el caso de un reticulado compuesto la demostración es algo más elaborada [9].

Piaget introdujo [4] un grupo de transformaciones sobre las funciones lógicas. En el caso binario este grupo es trivial y por esta razón su estudio no es relevante. En el caso dialéctico no es así, por esta razón analizaremos algunas de las propiedades generales.

En su presentación original, Piaget introduce tres tipos de transformaciones que puede ser aplicadas a una función lógica cualquiera. A efectos de fijar las ideas, definiremos estas transformaciones en el caso de una función de dos variables:

Definición 5.5: Se llama *negación* de la función $\boldsymbol{F}(x,y)$, si $\boldsymbol{N}$ es una negación cualquiera, a la función definida por:

$$\boldsymbol{N}\ \boldsymbol{F}(x,y)$$

Esta definición es trivial, si bien no lo es su aplicación posterior a la lógica. Piaget llama “inversa” a esta transformación. En [19] se la llama

[9] Esta demostración no estaba en la publicación original puesto que no había entonces una definición precisa de los reticulados dialécticos. La demostración no es difícil. Sea A_1 un máximo. Existe al menos un átomo a_p que no cumple $a_p \leq A_1$. La transformación $\boldsymbol{N}$ definida $\boldsymbol{N}A_i = a_{p+i-1}$ define una negación estricta.

“contraria”.

Definición 5.6: Se llama *antónimo* de la función $F(x,y)$, si N es una negación cualquiera, a la función definida por:

$$F(Nx,Ny)$$

Esta transformación es llamada por Piaget “recíproca”. La terminología de “antónimo” la hemos tomado de [19] donde se la emplea al analizar la lógica aymará. Finalmente se tiene la transformación que Piaget llama “correlativa”:

Definición 5.7: Se llama *dual* o *asociada* de la función $F(x,y)$, si N es una negación cualquiera, a la función definida por:

$$N'F(Nx,Ny)$$

donde N' es la negación inversa de N.

Como es inmediato, todas estas transformaciones son un caso particular de una forma más general, si se tiene en cuenta ahora uno cualquiera de los elementos de $\mathbf{G_N}$. En el caso binario o en la lógica modal las variantes terminan con estas tres definiciones, esto no es así si el grupo $\mathbf{G_N}$ es algo más complejo como ocurre en las restantes dialécticas. Este caso general se contempla en la definición:

Definición 5.8: Se llama transformación de Piaget –y grupo de Piaget a la colección $\mathbf{G_P}$ de todas estas transformaciones– de una función $F(x, y)$, si $\mathbf{G_1}$ y $\mathbf{G_2}$ son transformaciones del grupo de negaciones $\mathbf{G_N}$, a la función:

$$\mathbf{G_1}\, F(\mathbf{G_2}x,\mathbf{G_2}y)$$

Es inmediato que $\mathbf{G_P}$ es un grupo y que comprende todas las transformaciones definidas anteriormente. También es inmediato que se cumplen los teoremas siguientes:

Teorema 5.7: El grupo de Piaget $\mathbf{G_P}$ es el producto directo del grupo de las negaciones, $\mathbf{G_N}$, por sí mismo. Es decir:

$$\mathbf{G_P} = \mathbf{G_N} \times \mathbf{G_N}$$

Teorema 5.8: El conjunto de las transformaciones duales o asociadas es un subgrupo normal del grupo $\mathbf{G_P}$.

A partir de las propiedades del grupo de Piaget se pueden extraer conclusiones interesantes sobre las funciones lógicas en un reticulado. Es bien conocido que las funciones definidas sobre el reticulado forman, a su vez, un segundo reticulado en el cual se emplea como relación de orden:

$\boldsymbol{f} \leq \boldsymbol{g}$ equivalente a: para todo x $\boldsymbol{f}(x) \leq \boldsymbol{g}(x)$

Por supuesto si restringimos las funciones al caso monótono, también tenemos un reticulado. Con esta extensión –que también es válida para el caso de varias variables– se tiene este interesante teorema:

Teorema 5.9: En el reticulado de las funciones (monótonas), las transformaciones de Piaget generadas por negaciones, son negaciones y las generadas por automorfismos, son automorfismos.

Demostración 5.9: Sea la transformación de Piaget definida por dos negaciones:

$$\boldsymbol{N}_1\, \boldsymbol{f}(\, \boldsymbol{N}_2 x, \boldsymbol{N}_2 y, \ldots)$$

Esta transformación es una transformación de elementos del reticulado que posee transformación inversa. Consideremos dos funciones $\boldsymbol{f}$ y $\boldsymbol{g}$ que cumplan:

$$\boldsymbol{f} \leq \boldsymbol{g}$$

y apliquemos la transformación a esta desigualdad. Se tiene sucesivamente, teniendo en cuenta la propiedad de monotonía de las negaciones:

$$\boldsymbol{f}(\, \boldsymbol{N}_2 x, \boldsymbol{N}_2 y, \ldots\,) \text{ £ } \boldsymbol{g}(\, \boldsymbol{N}_2 x, \boldsymbol{N}_2 y, \ldots\,)$$

$$\mathbf{N}_1\, \mathbf{f}(\ \mathbf{N}_2 x,\ \mathbf{N}_2 y,\ \ldots\ )\ ^{3}\ \mathbf{N}_1\, \mathbf{g}(\ \mathbf{N}_2 x,\ \mathbf{N}_2 y,\ \ldots\ )$$

Luego, la transformación de Piaget posee inversa e invierte el orden en el reticulado de las funciones, es una negación, por el Teorema 3.3. En forma dual se demuestra el resultado para los automorfismos.

1.7 La interpretación de los valores dialécticos

La clave para interpretar los valores dialécticos de un reticulado se encuentra en la lógica tradicional binaria. La vinculación entre estos problemas es el tema principal de esta sección.

Consideremos una función proposicional clásica, $\boldsymbol{P}(x)$, donde la variable x esta definida en un conjunto reducido de valores. Supongamos, para fijar las ideas, que x solamente pude tomar tres valores: x_1, x_2, x_3. A su vez, la función $\boldsymbol{P}(x)$ solamente toma los valores lógicos “verdadero” o “falso”, representados respectivamente por 1 o 0 en nuestra notación. De acuerdo con esto, *solamente existen ocho funciones proposicionales diferentes de la variable* x. En efecto, se puede formar una especie de tabla de verdad para la función $\boldsymbol{P}(x)$ que consiste en asignar los valores 0 o 1 a la terna de valores posibles de x. Es inmediato que existen solamente ocho maneras diferentes de fabricar esta tabla. En definitiva, si se piensa solamente en la variable x, cada función proposicional $\boldsymbol{P}(x)$ es equivalente a una terna de valores binarios.

En forma equivalente, las funciones proposicionales de una variable x pueden considerarse proposiciones de un reticulado booleano $\mathbf{B}^3$, equivalente a las ternas de valores binarios. En la Figura 2 se presenta el diagrama de ternas de valores.

	1,1,1	
1,1,0	*1,0,1*	*0,1,1*
1,0,0	*0,1,0*	*0,0,1*
	0,0,0	

Figura 2: El reticulado $\mathbf{B}^3$ como ternas de valores binarios.

Si consideramos una función proposicional de varias variables, $\boldsymbol{Q}(x,y,\ldots,z)$ –que supondremos que contiene la variable x– se puede convertir en otra función proposicional que no contenga a la variable x pero que en lugar de tomar los valores 0 y 1, tome *ternas* de valores binarios como valores lógicos.

La idea puede explicitarse de esta forma. Sea la función proposicional $\mathbf{R}(y,...,z)$, con valores en $\mathbf{B}^3$, definida como:

$$\mathbf{R}(y,...,z) = \mathbf{Q}(x_1,y,...,z),\mathbf{Q}(x_2,y,...,z),\mathbf{Q}(x_3,y,...,z)$$

Este resultado puede ser generalizado. Toda vez que se elige una variable particular, el conjunto de las funciones proposicionales de la lógica binaria coincide con el conjunto de las funciones proposicionales que carecen de esta variable, pero definidas en una lógica booleana de un grado igual al número de valores diferentes que toma la variable eliminada.

Este importante resultado permite vincular los valores que toma una variable y las lógicas booleanas de grado superior a uno. Pero esta vinculación también ocurre en la dirección inversa.

Si consideramos una lógica booleana $\mathbf{B}^3$, como la indicada en la Figura 2, y las funciones proposicionales definidas allí, de las variables $y,...,z$ ocurre la situación inversa. Supongamos que identificamos los elementos de $\mathbf{B}^3$ con una *terna de valores binarios*, cosa que siempre es posible. Imaginemos una variable *ficticia* x que tome tres valores solamente. Se puede realizar el camino inverso. Una función proposicional $\mathbf{R}(y,...,z)$ definida en $\mathbf{B}^3$ permite definir una función proposicional $\mathbf{Q}(x,y,...z)$ en $\mathbf{B}$, que incluye la variable ficticia x, mediante la terna de ecuaciones:

$$\mathbf{Q}(x_1,y,...,z) = \mathbf{R}_1(y,...,z)$$
$$\mathbf{Q}(x_2,y,...,z) = \mathbf{R}_2(y,...,z)$$
$$\mathbf{Q}(x_3,y,...,z) = \mathbf{R}_3(y,...,z)$$

donde $\mathbf{R}_1,\mathbf{R}_2,\mathbf{R}_3$ es la terna de valores binarios que toma la función $\mathbf{R}$ en $\mathbf{B}^3$.

Supongamos que intentamos analizar *el universo real* mediante estructuras lógicas y supongamos además que lo intentamos realizar desde un punto de vista binario estricto, ya sea porque desconocemos otras lógicas, ya sea porque esta es una posición que hemos adoptado. Si la estructura lógica del universo *no fuera binaria*, nada nos detendría. Toda vez que fuera necesario, por la vía de crear una variable ficticia, se podría llevar una lógica sobre un reticulado complejo, a un problema binario.

Desde el punto de vista inverso, supongamos que en *la mayoría* de las funciones proposicionales interviene una variable especial t. Supongamos todavía, para regresar al mismo ejemplo, que esta variable toma solamente tres valores. Si se adopta la postura binaria, se puede construir la lógica en la forma usual. Si se adopta la postura de eliminar esta variable, *a priori*, se pasa a trabajar en $\mathbf{B}^3$.

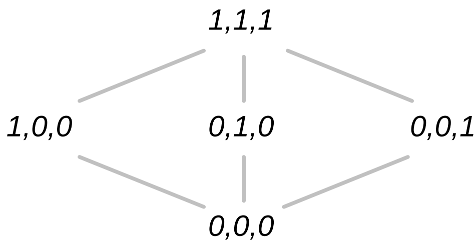


Figura 3: reticulado que forman los elementos de $\mathbf{B}^3$ tales que no poseen dos valores *1*; coincide con el reticulado $\mathbf{D}_3$.

También *a priori* sabemos que en $\mathbf{B}^3$ existen ocho posibles valores lógicos, pero lo que no podemos saber, porque esto *depende de la realidad material* y no de nuestra posición acerca de la lógica, si no sucede que *algunos de estos valores lógicos de* $\mathbf{B}^3$ *no ocurren nunca*. Bien podría ser, por ejemplo, que existieran valores lógicos de $\mathbf{B}^3$ que no ocurrieran en ninguna función proposicional de la realidad material. A título de ejemplo, podría ocurrir que ninguna función proposicional tomara un valor lógico con dos *1*. En este caso, en lugar de estar trabajando en el reticulado $\mathbf{B}^3$ se estaría trabajando en un reticulado con menos elementos, el presentado en la figura 3 que coincide con $\mathbf{D}_3$.

El estudio de los valores dialécticos, en definitiva, termina en un análisis de casos clásicos que poseen interés y en la demostración de que es posible elaborar una interpretación que no solamente coincide con la del materialismo dialéctico sino que también posee interés desde el punto de vista de la elaboración del conocimiento humano.

Los reticulados dialécticos compuestos, por su propiedad básica de definición, se vinculan estrechamente a reticulados booleano. En efecto, sea n el número de sus átomos, es claro que se puede formar un reticulado booleano $\mathbf{B}^{\mathbf{n}}$ de *todas las sumas formales de* n *átomos*. Resulta claro que existe una correspondencia que lleva cada elemento del reticulado booleano sobre el reticulado dialéctico y que conserva la suma de los átomos. Con esto queda demostrada que la interpretación que se ha sugerido es siempre posible.

Finalmente nos queda el punto central de la interpretación: la significación los valores lógicos del reticulado. En un reticulado poseemos dos “dimensiones”, el orden y el rango. Por un lado tenemos una cantidad de elementos que poseen igual nivel lógico y por otro lado poseemos una cadena de elementos que vinculan 0 con 1.

La *lógica modal* nos presenta una interpretación simple para los valores dentro del rango del reticulado. A medida que nos alejamos de 0 y nos acercamos a 1 aumenta el “valor lógico” del elemento. Nos movemos en forma modal, por “grados de verdad”. El rango, en un reticulado, nos asegura el carácter modal de la lógica.

Por el contrario, el orden del reticulado expresa otra propiedad: *la temporalidad*. Si nos basamos en la interpretación analizada, a medida que aumenta el orden aumentan las supuestas variables ficticias y el orden del reticulado booleano donde se pueden interpretar los valores lógicos. La negación, a su vez, se presenta como una “rotación” de los valores en la dirección del orden. Por esto mismo, la negación aparece como un elemento “temporal” o de movimiento en el reticulado.

El análisis que sigue nos acercara a esta doble interpretación de la dialéctica.

Parte 2: las dialécticas naturales

1.8 La lógica yin–yang

Como hemos analizado en la sección anterior, las lógicas booleanas admiten una interpretación simple aun en casos diferentes del binario. En esta sección estudiaremos la lógica $\mathbf{B}^2$ desde un punto de vista nuevo. Se nos presentara como una lógica dialéctica, de contenido histórico válido, con varias interpretaciones lógicas novedosas. Por estas razones puede decirse que esta sección permite mostrar la validez no trivial de la ecuación $\mathbf{B}^2 = \mathbf{D_2}$ que expresa que esta lógica se puede interpretar tanto como una lógica booleana como una lógica dialéctica, aunque enormemente simple.

El ejemplo más simple, más directo y más estimulante lo presenta Oscar Wilde en uno de sus más conocidos epigramas:

> En el Arte no hay nada semejante a una verdad universal. Una verdad en el Arte es aquella que su contradictoria también es verdadera. [12]

Es difícil encontrar en una forma tan compacta, tantas ideas lógicas y de tanto contenido. Por supuesto que también podemos ver en esta afirmación solamente una muestra del ingenio de Wilde, pero intentaremos ver mucho más. Supongamos que la afirmación se puede tomar en su sentido literal estricto. Resulta entonces que existen, por lo menos, tres tipos de valores lógicos:

- *verdades* universales, mencionadas a texto expreso.
- *falsedades* (universales), por contraposición.
- *verdades en el Arte*, mencionadas a texto expreso.

Se desprende del pasaje que existe asociado un concepto de *negación* que vincula los grupos de valores lógicos. En la Figura 4 se presenta un reticulado donde se interpretan todos estos hechos.

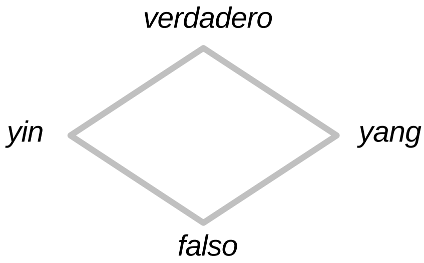


Figura 4: Reticulado de la lógica yin–yang, coincide con $\mathbf{B}^2$ y $\mathbf{D}_2$.

En el reticulado se designan los valores lógicos nuevos de Wilde como *yin* y *yang*. Estos nombres –que usamos en forma provisoria y que más adelante se cambian– están tomados de la filosofía tradicional china y su elección se justificara en lo que sigue. Por otra parte, el reticulado es bien conocido y coincide con el reticulado booleano de orden 2 o con el reticulado dialéctico de orden 2. La noción de negación que introduce Wilde, retomando la designación de *0* y *1* para la "verdad universal" y la "falsedad universal" e introduciendo las palabras *yin* y *yang*, se puede expresar como:

***N** = (01)(yin yang)*

La afirmación original de Wilde adquiere en este contexto una gran precisión lógica y no puede ser considerada una simple frase de ingenio. Aparte de las verdades y falsedades universales que se aplican, por ejemplo, a la ciencia y a la técnica, las afirmaciones acerca del Arte tiene otra suerte. Excepto el caso de afirmaciones que pueden ser trivialmente verdaderas o falsas, todas las demás afirmaciones poseen un valor lógico diferente. El enunciado de Wilde citado se puede reformular en términos precisos como:

> Toda afirmación no trivial sobre el Arte posee valor lógico *yin* o *yang* y de allí que la negación de toda afirmación, sea una afirmación igualmente válida.

En lo expuesto, se entiende que los valores lógicos *yin* y *yang* son valores que indica *verdad* y no falsedad, si bien puede ser parcial. Este criterio es el empleado en la Definición 5.2 al considerar una tesis como un enunciado que puede ser parcialmente verdadero. El Teorema 5.1 contiene el enunciado abstracto de la afirmación de Wilde sobre el Arte.

Como este es el primer ejemplo de afirmación que no toma los valores lógicos tradicionales, se justifica abundar en el punto. A título de ejemplo consideremos las dos afirmaciones:

- el Arte refleja la realidad
- el Arte crea una realidad nueva

La mayoría de las personas estarán de acuerdo con las siguientes afirmaciones:

- estas afirmaciones son –en algún sentido– *contrarias*
- estas afirmaciones no son –en forma absoluta– ni universalmente verdaderas ni universalmente falsas; en todo caso no es sencillo establecer claramente su *valor lógico*
- la primera afirmación posee un tono *materialista* y la segunda un tono *idealista*

Por el contrario, es poco probable que exista acuerdo acerca de las siguientes afirmaciones:

- la primera afirmación es *yin* y la segunda *yang*
- la primera afirmación es marcadamente "masculina" en tanto que la segunda es marcadamente "femenina"
- la primera afirmación es marcadamente "estática" en tanto que la segunda es marcadamente "dinámica"
- ninguna de las dos afirmaciones posee algo de verdad, deben ser consideradas enteramente falsas por igual
- lo opuesto de las afirmaciones anteriores

La respuesta a estas posibilidades será analizada al final de la sección luego de presentar más materiales de la lógica yin–yang. Estas consideraciones nos muestran que el cerebro humano puede trabajar con valores lógicos diferentes de "verdadero" o "falso"; estos conceptos son aplicables al universo y poseen interés real. A efectos de establecer con mayor firmeza este punto, abundaremos en ejemplos de lógica yin–yang. El primero es la propia filosofía tradicional china de donde hemos tomado las palabras que designan los valores lógicos:

> (...) las nociones secundarias de *yin* y *yang* se transforman en entidades escolásticas que la especulación emplea para ordenar los hechos. El *yin* y el *yang* dejan de ser principios concretos, pero la orientación dualista que dieron al pensamiento fue un hecho consumado. Ni el *yin* ni el *yang* se convertirán en realidades religiosas, pero la clasificación bipartita continuara dominando el mundo de las cosas sagradas: el alma continuara doble (...) [13]

Tal vez la principal duda que tenga un lector familiarizado con la lógica y con el pensamiento chino consiste en aceptar que estas ideas pueden ser consideradas *valores lógicos* y no como “entidades metafísicas” de las que no hay nada que explicar. Esta duda aparecerá más de una vez en las secciones siguientes, pero postergaremos su análisis hasta disponer de todos los elementos necesarios.

Quien puede ilustrar mejor el significado de los dos valores lógicos es Toynbee, puesto que las nociones de *yin* y de *yang* son pilares fundamentales en su análisis del movimiento histórico. En estos fragmentos seleccionados del compendio de su obra –un compendio del compendio– encontramos:

> Este movimiento alterno de lo estático y lo dinámico, de movimiento, de pausa y de movimiento (...) los sabios de la Sociedad Sínica describieron estas alternativas en términos de Yin y Yang (...) la historia se abre en un estado perfecto de Yin (...) Cuando Yin esta así completo se halla dispuesto para convertirse en Yang (...) la historia nos revela oportunamente que el fenómeno de la desintegración, un movimiento que va de la guerra a la paz: de Yang a Yin (...) La obra del Espíritu de la Tierra (...) se manifiesta en las génesis, crecimientos y colapsos y desintegraciones de las sociedades humanas (...) podemos oír el compás de un ritmo elemental cuyas variaciones hemos llegado a conocer como incitación–y–respuesta, retiro–y–retorno, derrota–y–recuperación, paternidad–y–filiación, cisma–y–palingenesia. Este ritmo elemental es el compás alternativo

> de Yin y Yang (...) El movimiento que este ritmo marca no es (...) el ciclo de una noria. El girar perpetuo de una rueda no es una vana repetición si en cada revolución lleva el vehículo cada vez más cerca de su meta (...) Según esto, la música que marca el ritmo de Yin y Yang es el canto de la creación. (...) Si atendemos bien, percibiremos que, cuando las dos notas chocan, no producen una disonancia sino una armonía. La creación no seria creadora si no absorbiera todas las cosas, incluso las que son contrarias a ella. [14]

Para Toynbee el *yin* y *yang* no son solamente una metáfora sino un pensamiento organizado. A lo largo de los tomos del "Estudio de la Historia" recurre una y otra vez –como un estudioso chino lo haría– para interpretar *el movimiento* de la realidad. En estos fragmentos que hemos citado se puede encontrar la marca inconfundible de una *dialéctica yin–yang* que explica el movimiento. Existe la idea de contrarios, existe la idea de girar sobre sí mismo, existe la idea de progreso en cada giro. En definitiva, la concepción teórica de la historia de Toynbee difiere de la concepción del materialismo histórico solamente en un punto: en tanto que la primera ocurre en la lógica dialéctica de orden 2, la segunda ocurre en la dialéctica de orden 3. Por supuesto, esta es una manera muy abreviada de enunciar diferencias que son un abismo, pero es bueno precisar que, desde un punto de vista abstracto, la diferencia fundamental se encuentra allí.

Veamos con más detalle la lógica de Toynbee. Toynbee afirma –y el contexto siempre lo confirma– que cada una de las proposiciones históricas o bien son *yin* o bien son *yang*. Esto es consecuencia de que cada momento histórico puede ser clasificado como "estático" o como "dinámico". Para Toynbee la sociedad posee estados y de allí que estos estados se trasladen a las afirmaciones sobre la historia. Este es un punto delicado en nuestro estudio. Consideremos una afirmación histórica. Según Toynbee esta afirmación será válida en un determinado contexto y en un período *yin* o *yang* según sea el caso. Las verdades históricas no aparecen como verdades universales, sino aparecen como verdades válidas en un lapso histórico solamente. A la afirmación *yin* sucede la afirmación *yang* y recíprocamente. El comportamiento de la realidad obliga a un comportamiento de la lógica.

La transformación del *yin* y el *yang* entre sí, el llamado "compás alternativo" o "canto de la creación" no es otra cosa que una función lógica: *la negación*. La negación aparece como el mecanismo del movimiento y como un proceso básico del curso de la historia. También este es un estrecho punto de contacto con la dialéctica materialista.

Las agudezas de Wilde, el pensamiento escolástico chino o el estudio de la historia de Toynbee no son los únicos ejemplos históricos de lógica yin–yang. También la teoría sexual de Freud es otro ejemplo sumamente interesante de esta lógica:

> Sadismo y masoquismo ocupan entre las perversiones un lugar particular, dado que la antítesis de actividad y pasividad que constituye su fundamento pertenece a los caracteres generales de la vida sexual (...) sus dos formas, activa y pasiva, aparecen siempre conjuntamente en la misma persona (...) Vemos así aparecer regularmente determinadas tendencias perversas como *pares contradictorios*, hecho cuya alta importancia teórica veremos más adelante (...) Cuando se descubre en lo inconsciente uno de estos instintos, apto para formar con su contrario uno de los pares que hemos hablado, aparece siempre actuando simultáneamente dicho instinto antitético. Toda perversión 'activa' queda así acompañada siempre en estos casos del factor antagónico correspondiente (...) [15]

Los *pares contradictorios*, según palabras textuales de Freud, conducen rápidamente a valores lógicos para los enunciados sobre la conducta humana. Se pueden diferenciar cuatro valores lógicos diferentes:

- afirmaciones universalmente válidas
- afirmaciones válidas para el inconsciente
- afirmaciones válidas para el consciente
- afirmaciones falsas

Estos cuatro valores, unidos a la condición de pares contradictorios, conducen a una lógica yin–yang. Dentro de esta lógica, la negación posee un papel primordial. Es una negación, el proceso por el cual una afirmación del consciente pasa al inconsciente; también es una negación la operación que realiza el cambio inverso. El primer proceso se vincula con la "génesis de las neurosis", el segundo, con la "terapia". Como es bien conocido, la labor del "analista" consiste en convertir los valores del *inconsciente* en valores del *consciente*. En nuestro lenguaje lógico, la operación que se realiza es la *negación*. Hasta resulta expresivo declarar que "la negación de las actitudes conscientes forma las neurosis", en tanto que "la terapia consiste en la negación del contenido inconsciente". Es de esperar que esta manera de presentar viejos resultados no inaugure una nueva escuela psicoanalítica.

En los casos que hemos presentado, la lógica yin–yang aparece en forma *espontánea*. No existe ningún intento por parte de los autores citados, ni siquiera la sospecha, de que se está en presencia de un mecanismo de razonamiento nuevo. En todos los casos esta nueva forma de razonar se presenta como una dialéctica y no como una lógica booleana, a pesar de que formalmente coincidan. El manejo de la contradicción y de la negación lo muestra. Pero por encima de esto, hay una razón más poderosa para saber que no se está en presencia de una lógica booleana derivada de combinaciones de lógicas binarias. Tal como hemos visto antes, la conversión entre $\mathbf{B}^2$ y $\mathbf{B}$ se puede realizar con el artificio de introducir o eliminar de variables ficticias. En ninguno de estos casos se sugiere este procedimiento. No se puede decir que exista una variable binaria oculta que permita separar las verdades contradictorias en el Arte, en la Historia o en el Inconsciente. La introducción de variables ficticias seria una forma de "salvar las apariencias" al estilo escolástico o de crear una lógica "convencional" como le hubiera gustado decir a Poincaré.

Podemos ahora interpretar estos valores lógicos *yin* y *yang*. Según el pensamiento chino, la interpretación de Toynbee o la teoría sexual de Freud, se puede asociar:

yin = lo estático, lo pasivo, lo femenino
yang = lo dinámico, lo activo, lo masculino

Sin embargo, hay buenas razones para *no aceptar* este tipo de identificación. En primer lugar, existe una simetría total en el reticulado $\mathbf{D}_2$ que choca con la posibilidad de diferenciar en forma real el valor *yin* del valor *yang* [10]. En segundo lugar, no posee mayor sentido intentar calificar los valores lógicos sino por características formales. En tercer

---

[10] Esta idea es la que conduce a considerar solamente funciones intrínsecas para la descripción de la lógica.

lugar, rápidamente nos internamos en problemas. Consideremos el caso de Freud como ejemplo: no solamente se encuentra “lo estático” y “lo dinámico” sino que también se encuentra “el consciente” y “el inconsciente” y no nos es posible identificar un grupo con el otro. Por esta razón, *rechazamos en forma terminante que posean un sentido interno los valores lógicos*.

A efectos de corroborar lo dicho, son interesantes dos citas que los clásicos del materialismo dialéctico que se vinculan directamente con la lógica yin–yang. Comencemos por el enunciado impreciso que formula Engels acerca de una de las leyes de la dialéctica:

> Todos los procesos de la naturaleza tienen dos caras. [16]

Si entendemos que la afirmación es de carácter general y que se puede aplicar directamente a la dialéctica $\mathbf{D_2}$, este enunciado traduce los resultados que hemos encontrado y habla de una simetría de “las dos caras”. La segunda cita pertenece a Lenin y toca un punto interesante. Por la propia naturaleza de la cita puede ocurrir que los lectores familiarizados con el materialismo histórico se sientan un poco desconcertados, pero en el curso de este trabajo la interpretación adquirirá una precisión cada vez mayor. Dice Lenin:

> (...) no es posible dejar de ver (...) la lucha de los partidos en filosofía, lucha que en definitiva expresa las tendencias y la ideología de las clases enemigas en la sociedad contemporánea (...) (como la lucha del) materialismo y el idealismo. [17]

Esta manera de estudiar la filosofía se asemeja a una dialéctica yin–yang. En este caso se puede afirmar que toda tesis filosófica no es una verdad universal sino que posee uno de los dos valores lógicos: “materialismo” o “idealismo”. Usando la terminología de Wilde, lo contrario de una afirmación filosófica válida, es también una afirmación filosófica válida; una posee carácter idealista y la contraria posee carácter materialista. En el plano de un pensamiento dialéctico es posible comprender esta dualidad y contemplarla desde un punto de vista más general.

Si aceptamos que no posee sentido intentar dotar de significado absoluto a los valores lógicos *yin* y *yang*, podemos rehacer esta dialéctica brevemente. En este reticulado existen dos negaciones:

(01)
(01)(yin yang)

La primera negación no afecta los valores dialécticos, la segunda coincide con la negación en $\mathbf{B}^2$. La principal diferencia entre la lógica booleana $\mathbf{B}^2$ en su interpretación tradicional y la lógica dialéctica $\mathbf{D}_2$, en la presentación que realizamos en este trabajo, es la existencia de dos negaciones en lugar de una única.

Desde el punto de vista de sus aplicaciones, las afirmaciones se dividen en dos tipos principales: las afirmaciones dialécticas y las afirmaciones universales. Pertenecen al primer tipo, en todos los contextos analizados, las afirmaciones de la matemática o de la lógica, que son formales puras. Pertenecen al segundo tipo, según los ejemplos analizados, las afirmaciones del Arte, de la Historia, de la Conducta Psicológica o de la Filosofía. Todas las afirmaciones de este tipo deben ser llamadas *tesis*, de acuerdo a la Definición 5.2. Las operaciones de negación poseen diferente significado según el campo que se considere, pero siempre la negación esta asociada a una forma de cambio o de acción.

Nos hemos detenido bastante en esta forma rudimentaria de dialéctica porque permite aclarar muchas de las ideas que se manejan en este trabajo. Pero lejos de quedar agotado el tema, con los planteos de esta sección recién se comienza a analizar el problema de los fundamentos de la dialéctica.

1.9 La dialéctica de Hegel

La dialéctica de Hegel es el primer ejemplo de lógica no binaria que fue enunciado como tal. Puesto que se trata del caso más importante de dialéctica, en la presente sección solamente presentaremos una introducción al tema. Todo el trabajo gira alrededor de esta dialéctica, de modo que se regresara permanentemente al problema de su interpretación.

Hegel fue el primer lógico que planteo la necesidad de tres valores lógicos adicionales, aparte de “verdadero” y “falso”. Estos tres valores lógicos fueron presentados originalmente por Hegel como instancias del conocimiento. Posteriormente los materialistas dialécticos –Marx, Engels y Lenin [16] [17] [18] [24]– extendieron su alcance a leyes que describían instancias del movimiento de la materia. Son, como es bien conocido:

- *tesis*, punto de partida
- *antítesis*, negación del anterior
- *síntesis*, negación del anterior y punto de llegada

Puesto que nuestra exposición se orientaba a este resultado, no casual que hayamos empleado la palabra *tesis* con un significado general. Sin embargo debemos diferenciar ideas nuevas. Las palabras *tesis*, *antítesis* y *síntesis* designan *valores lógicos* en el reticulado **D3**, en tanto que la palabra *tesis* designa una proposición que toma un valor dialéctico cualquiera, por ejemplo, *antítesis*.

Llegados a este punto es necesario realizar una precisión acerca de la terminología sobre los valores lógicos. Puesto que dentro del reticulado hegeliano, eligiendo adecuadamente la negación, se puede construir una lógica idéntica a $\mathbf{D_1}$ o $\mathbf{D_2}$, resulta conveniente designar los valores lógicos en forma coherente, de acuerdo con la nomenclatura clásica de Hegel. De acuerdo con esta idea, el valor “posible” de la lógica modal se designara, desde ahora como *tesis*. De la misma manera, se pueden identificar los valores *yin* y *yang* con *tesis* y *antítesis*. Esta manera de proceder refleja una realidad más profunda, que se examina en la sección 11.

Es interesante observar que algunos tratadistas chinos clásicos observaron una laguna en la dupla “yin–yang” y así es que se encuentra con cierta frecuencia la terna “yin–yang–tao”. Sin duda este es uno de los más claros anticipos de la lógica hegeliana.

Es inmediato que la negación más importante en la dialéctica hegeliana esta expresada por:

$$\boldsymbol{N} = (01)(\textit{tesis antítesis síntesis})$$

Si empleamos como abreviaturas de los valores dialécticos *t,a,s*, esta negación es la que aparece en la Figura 1. En el presente trabajo toda vez que se haga referencia a una negación en la dialéctica hegeliana, sin otra referencia, se entenderá esta negación. Sabemos que esta negación es estricta y principal en $\mathbf{D_3}$. También es muy claro que se cumplen las condiciones de la negación hegeliana. Tal vez no sea tan clara la condición:

N *síntesis = tesis*

En las exposiciones no formales de la dialéctica no queda claro que la negación de la *síntesis* sea una *tesis*. De alguna manera se suele inducir a pensar que el valor lógico *síntesis* coincide con *tesis*. Si esto fuera así, la dialéctica se convierte en la dialéctica yin–yang y esta situación es groseramente falsa. Nos encontramos aquí, por primera vez, con un resultado que al ser enunciado en forma precisa adquiere un aspecto no esperado. Esta situación aparece muchas otras veces.

Es importante analizar el problema de la negación. En la lógica hegeliana la negación es de grado 6, en la lógica yin–yang es de grado 2. Esta diferencia hace, por ejemplo, que sea válida la ecuación:

N*(****N*** *tesis) = síntesis*

que expresa que la negación de la negación llega a un punto nuevo. En cambio, en la lógica yin–yang se cumple:

N*(****N*** *yin) = yin*

En cambio, la triple negación en **D3** cumple con:

N*(****N****(****N*** *tesis)) = tesis*

Al igual que en el caso yin–yang, se plantea en el caso hegeliano la duda sobre los valores lógicos. En buena medida resulta difícil aceptar, la primera vez, que la terminología clásica haga referencia a *valores lógicos* y no a otro tipo de entidades. En las formulaciones imprecisas de la dialéctica se suele considerar que *tesis*, *antítesis*, etc., son **estados** de un proceso dinámico. Ocurre lo mismo que el caso de la dialéctica yin–yang: son las propiedades materiales las que inducen una lógica y de allí la confusión. En definitiva, el problema nace de que la lógica es un reflejo de las propiedades materiales del universo. Por esta razón existe la confusión.

Hay otro punto, digno de destacarse, que también puede causar una cierta perplejidad inicial. Al igual que en el reticulado yin–yang, en el reticulado de Hegel *no se pueden diferenciar los tres elementos*. Esto hace que no exista nada que permita diferenciar una *tesis* de una *antítesis* o una *síntesis*. Una afirmación no tiene, en abstracto, uno especial de estos valores asignado por su contenido. Le son aplicables por igual los tres valores. Así resulta que cualquier afirmación tanto es punto de partida como de llegada, tanto *tesis* como *antítesis*, las diferencias nacen de las relaciones recíprocas solamente [11].

Más adelante regresaremos sobre este punto. Por el momento nos conformaremos con adelantar un paso más en la interpretación de los valores lógicos de los reticulados.

1.10 La dialéctica aimara

El caso más sorprendente de lógica natural es, sin duda, el caso aymará. Este importante descubrimiento se debe a Iván Guzmán de Rojas [19] y merece una consideración destacada.

Desde los primeros estudios que se realizaron de la lengua aymará, llamó mucho la atención el peculiar manejo de los sufijos. Ludovico Bertonio la llamaba “maquinaria de partículas”. Sin embargo, este aparato lingüístico no fue profundizado en muchos de sus aspectos, en especial en sus aspectos lógicos.

Si partimos de la base que el pensamiento lógico debe ser expresado a través del lenguaje, uno de los resultados más importantes que debe derivar de la lingüística es la estructura lógica del pensamiento espontaneo. Ya hemos insistido en este hecho. En el caso de la lengua aymará el resultado es sorprendente.

En el estudio citado se muestra con poderosos argumentos que la “maquinaria de partículas” de Bertonio expresa una lógica coincidente con la lógica modal de Lukasiewicz. Más aun, el pueblo aymará, a efectos de asegurarse la comunicación con el conquistador, adapto la lengua castellana de modo de expresar los diferentes valores lógicos necesarios. A título de ejemplo analicemos algunos casos.

Existen dos modalidades de la afirmación con un significado lógico diferente. Estas modalidades se expresan mediante sufijos en el aymará o mediante formas idiomáticas especiales, en castellano. Una forma de la afirmación es:

---

[11] También aquí aparece claramente formulada la idea que conduce a las funciones intrínsecas.

x.***pi*** *x* “pues”

Mediante esta forma se expresa que *x* es cierto. En cambio, con esta otra forma de afirmación:

x.***ki*** *x* “nomás”

se expresa la idea que existe la posibilidad de *x* pero no la certeza.

En este simple ejemplo se origina, según el autor, la incomunicación entre conquistados y conquistadores. También se encuentra allí toda la lógica modal de Lukasiewicz. A lo largo del trabajo se recorre los diferentes caminos lógicos de la lengua aymará y se elabora una sorprendente dialéctica natural, desconocida hasta nuestros días. En manejo de contrarios, de funciones y de peculiaridades de la negación para adquirir rápidamente la convicción que esta lógica natural no es una extensión de la lógica clásica griega sino una aproximación diferente al conocimiento del universo. En las sucesivas referencias a la lógica aymará se reforzara esta afirmación.

1.11 Otras dialécticas naturales

En esta sección analizaremos casos de lógicas *naturales* –en el sentido que han aparecido en forma espontanea en la experiencia histórica de la humanidad– que ejemplifican algunos de los reticulados dialécticos. Comencemos por la lógica cuántica de Von Neumann y Birkhoff.

El planteo original de la necesidad de una lógica nueva para interpretar la mecánica cuántica nace de la formulación de proposiciones acerca del spin del electrón. La conducta del spin es singular y puede consultarse en la bibliografía [5] [11] por mayores detalles. En resumen, la conducta se puede expresar por el reticulado **D4** de la Figura 5. Se designa con *spin X+* al caso de un electrón con el spin definido en forma precisa y dirigido hacia las X positivas. En forma análoga se define *spin X–* cuando esta dirigido hacia las X negativas y los casos correspondientes para el eje Y.

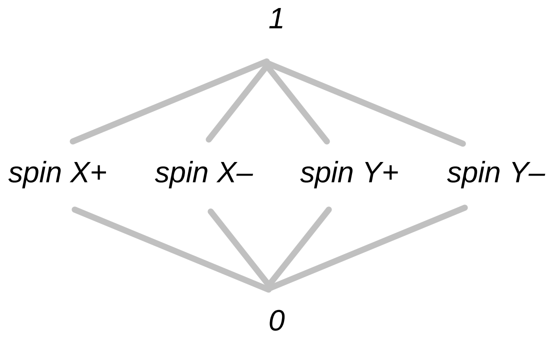


Figura 5: Reticulado $\mathbf{D_4}$ empleado en la lógica cuántica del spin.

En la lógica cuántica se emplea la propiedad no distributiva de este reticulado para formular las proposiciones *no equivalentes*:

spin X+ ***y*** *(spin Y+* ***o*** *spin Y–)*
(spin X+ ***y*** *spin Y+)* ***o*** *(spin X+* ***y*** *spin Y–)*

La primera proposición es verdadera en el mundo físico en tanto que la segunda es *siempre falsa* porque no es posible especificar, en forma simultánea, el spin en dos direcciones diferentes. Resulta de aquí que la *lógica* que cumple el spin de una partícula *no es distributiva*. Hasta aquí llega la física. Continuemos con el planteo lógico.

Es interesante observar que los *estados* de las partículas elementales inducen *una lógica*. Esta idea, que ya hemos encontrado otras veces, se plantea también en el mundo físico. En segundo lugar, es interesante observar que la primera afirmación, que es cierta, no vale *1* sino *spin X+*, *es una tesis* y no una tautología. También es interesante observar que el ambiente de la lógica cuántica es un reticulado dialéctico. Finalmente, una negación *natural* en esta lógica –concepto que no ha sido tratado por la lógica cuántica tradicional– es:

N *= (01)(spin X+ spin X–)(spin Y+ spin Y–)*

que establece relaciones de inversión del sentido del spin de la partícula. No es esta la oportunidad de desarrollarla, pero la noción de *complementariedad* se encuentra vinculada al estudio de las negaciones en los reticulados cuánticos.

Existe otro ejemplo histórico interesante de empleo del reticulado dialéctico $\mathbf{D_4}$. En la Jonia materialista surgió una noción importante en occidente: la noción de *elemento*. En su forma más tradicional, la materia estaba formada por cuatro elementos: “aire”, “agua”, “tierra” y “fuego”. En el Poema de Empédocles encontramos:

> T.1 (...) de todas las cosas cuatro son las raíces: Fuego, Agua y Tierra y la altura inmensa del Éter.
> T.6 (...) iguales son (...) todas estas cuatro cosas (...)
> T.7 (...) Unas hacia las otras se destruyen, Unas hacia las otras se acrecientan. [10]

Es usual interpretarlos en sentido literal y hacer decir a los materialistas jonios la simpleza de que todo el universo se formaba por estas cuatro entidades. Sin embargo, creemos que es posible una interpretación no tan simple. El último fragmento de Empédocles abre una puerta y Heráklito nos presenta esta interesante perspectiva:

> 76. Vive el Fuego de la muerte de la Tierra y vive el Aire de la del Fuego; vive el Agua de la muerte del Aire, y de la muerte del Agua vive la Tierra. [10]

El concepto de *vivir de la muerte*, de evidente contenido dialéctico, se encuentra en otros fragmentos que han sobrevivido de Heráklito. Si interpretamos esta idea como una *negación*, los elementos pueden ser considerados una forma de reticulado **D4**, tal como muestra la Figura 6. Sobre este reticulado se define una negación.

La negación de Heráklito se puede presentar como:

***N** = (01)(tierra agua aire fuego)*

y esta negación es principal y estricta en $\mathbf{D_4}$. Hasta aquí puede pensarse que hay más fantasía que realidad. Sin embargo, la escolástica posterior agrega a los cuatro elementos tradicionales otras cuatro nociones básicas y elementales: *húmedo*, *frío*, *seco* y *caliente*.

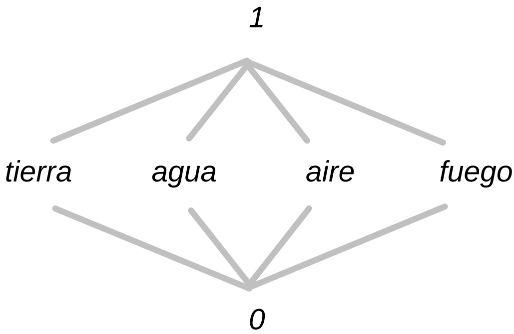


Figura 6: Los elementos clásicos como reticulado $\mathbf{D_4}$.

Es bien conocido que entre ellos se establecieron relaciones *de tipo lógico* tales como [12]:

agua = húmedo ***y*** *frío*	*húmedo = tierra* ***y*** *agua*
tierra = frío ***y*** *seco*	*frío = agua* ***y*** *aire*
fuego = seco ***y*** *caliente*	*seco = aire* ***y*** *fuego*
aire = caliente ***y*** *húmedo*	*caliente = fuego* ***y*** *tierra*

Sin duda estas relaciones conducen al reticulado $\mathbf{2D_4}$ que se presenta en la Figura 7. Es interesante observar que las relaciones lógicas nuevas coinciden admirablemente con la rotación de los elementos que propone Heráklito. Estas coincidencias en los elementos clásicos griegos se encuentran también en el pensamiento chino.

En el pensamiento tradicional chino encontramos otra concepción de los elementos, claramente diferente de la occidental.

> Los elementos se enumeran en el orden de sucesión de las Estaciones que simbolizan. La teoría intenta sostener que este orden es el de una *sucesión regular* en forma de ciclo. Según esta teoría, la teoría de la producción recíproca de los elementos, la Madera engendra al Fuego, el Fuego engendra a la Tierra (...) el Agua engendra a la

[12] Es obvio que empleo el operador **y** como un operador lógico o como operador del reticulado, en ambos casos, *impreciso*. Es más expresivo emplear una palabra que un símbolo que sugiere una falsa precisión.

Madera. Una tercera disposición se opone (...) La teoría correspondiente es la cual mediante los elementos *triunfan* unos sobre los otros (...) el Metal triunfa sobre la Madera, la Madera triunfa sobre el Agua (...) la Tierra triunfa sobre el Metal. [13]

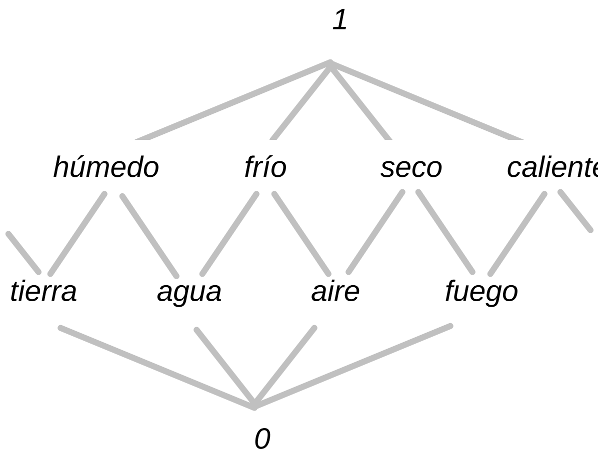


Figura 7: Los elementos clásicos como reticulado $\mathbf{2D_4}$.

Los cinco elementos chinos, que difieren claramente de los occidentales, se encuentran relacionados por dos formas de girar, dos *negaciones* como corresponde decir en una concepción dialéctica. La primera negación esta asociada a la *génesis*, la segunda a la *destrucción*. Como podemos apreciar estas ideas reproducen, en líneas generales, el pensamiento de Heráklito. Podemos interpretar esta teoría como un reticulado $\mathbf{D_5}$ en el cual se consideran dos negaciones diferentes:

génesis = (01)(madera fuego tierra metal agua)
destrucción = (01)(metal madera agua fuego tierra)

La gran conclusión y la gran interrogante de esta sección –y de las dos secciones anteriores– se ha desplazado desde la interpretación de los reticulados a un problema más general acerca del significado de la lógica y su vinculación con la realidad material del universo.

1.12 La lógica como imagen del universo

Los ejemplos de dialécticas analizados en las últimas secciones nos obligan a replantear el concepto de lógica tradicional. De alguna manera la lógica aparece como una estructura asociada a las propiedades fundamentales del Universo, como supremas leyes de la materia y del movimiento. Esta tesis ha sido sostenida siempre por el materialismo dialéctico.

El estudio del Universo se basa en la formulación de proposiciones. La vinculación entre las proposiciones constituye el conocimiento del Universo. Las estructuras básicas del Universo deben reflejarse de alguna manera como estructuras en las proposiciones.

La lógica aparece como un gigantesco homomorfismo –un homomorfismo cósmico– que aplica la totalidad de las proposiciones, capaces de expresar el conocimiento del Universo, sobre una estructura más reducida, sobre una *estructura algebraica*. Si esta estructura algebraica es un reticulado –y suponemos que se trata de alguno de los reticulados que hemos llamado dialécticos– este homomorfismo da origen a una *lógica*. Si el reticulado es dialéctico, tendremos derecho a llamar *dialéctica* a esta lógica.

La existencia de este homomorfismo es la explicación de la coincidencia entre *estados* o *propiedades* de la materia y *valores lógicos*. Reticulados y valores lógicos son la imagen de estas propiedades materiales y de allí que se produzca esta coincidencia inesperada entre "elementos" (o *yin* y *yang*) y valores lógicos. La epistemología espontanea del hombre descubrió este homomorfismo e intento darle una presentación abstracta, con mayor o menor éxito. De hecho fue George Boole [20] quien lo logró por primera vez. Este homomorfismo, que refleja las leyes de la materia sobre las estructuras algebraicas de la lógica, es quien muestra que tanto la ciencia de la lógica como la matemática no son una libre creación del cerebro humano sino una imposición del Universo material, con la fuerza de una ley natural.

En el pasado –y en menor manera en el presente– este homomorfismo cósmico ha conducido a otras estructuras. Las interpretaciones mágicas, numerológicas o astrológicas, y tantas otras, no son sino homomorfismos equivocados, pero basados en intentos razonablemente acertados. A título de ejemplo, puede interpretarse que el pensamiento pitagórico consiste en un homomorfismo sobre $\mathbf{D}_7$ y de allí la importancia de los astros móviles, las escalas musicales y tantas otras estructuras asimilables a $\mathbf{D_7}$; la astrología occidental no es sino una especulación acerca de $\mathbf{D_{12}}$; el cabalismo judío emplea, en algunas oportunidades, reticulados bastante más complejos [13].

De este punto de vista surgen algunas interrogantes. Sin duda la primera de todas es el porqué de la lógica binaria y el porqué de la dialéctica de Hegel. En ambos casos es posible dar una respuesta simple. La lógica binaria es el homomorfismo cósmico más radical de todos, la estructura final solamente posee dos elementos: con uno único seria trivial. Por esta razón, el conocimiento del Universo comienza con las teorías formales: son las teorías que poseen estructura lógica más simple.

La dialéctica de Hegel, es decir el reticulado $\mathbf{D_3}$, posee una razón muy simple y muy poderosa. En el siguiente teorema –cuya demostración se encuentra en [9], capitulo IX, corolario 2 del teorema 2– da los elementos fundamentales:

Teorema 11.1: Todo reticulado no distributivo y modular posee un sub–reticulado que coincide con $\mathbf{D_3}$.

Este teorema asegura que toda vez que aparezca una estructura no distributiva, tal como sucede en la mecánica cuántica o en otras ramas del conocimiento, existe una versión simplificada, un subconjunto de esta estructura que corresponde a una dialéctica hegeliana.

Examinemos el problema del conocimiento humano desde un punto de vista más general. Existe un principio de la dialéctica materialista que ha sido enunciado en forma implícita por Lenin que establece:

> El electrón es tan *inagotable* como el átomo, la naturaleza es infinita, pero *existe* infinitamente, y este reconocimiento –que es el único categórico, el único incondicional– de su *existencia* fuera de la conciencia y de las sensaciones del hombre es precisamente lo que

---

[13] En la técnica “curativa” conocida como las flores de Bach puede considerarse que se trabaja sobre el reticulado $\mathbf{5D_{38}}$. En efecto, las 38 flores pueden identificarse con otros tantos átomos del reticulado. Con ellas se forman “agrupaciones” de hasta 5 flores, más está fuera de consideración. Este se describe muy bien en el reticulado $\mathbf{5D_{38}}$ donde el supremo de cualquier conjunto de 5 átomos es siempre *1*.

distingue el materialismo dialéctico del agnosticismo relativista y del idealismo. [17]

Este principio nos asegura que con el progreso del conocimiento humano cada vez será necesario recurrir a homomorfismos más complejos y más ricos para comprender la estructura de la materia y del movimiento. Esto se traduce en el aumento creciente de la complejidad de los reticulados. En el pasado se realizaron esfuerzos importantes para ampliar la comprensión del universo y esto llevo a ampliar los horizontes de la lógica.

El pasaje de la lógica binaria a la lógica yin–yang, también booleana, (de $\mathbf{B}$ a $\mathbf{B}^2=\mathbf{D}_2$) realizado por los chinos clásicos y por algunos teóricos modernos de occidente es un primer intento de romper las barreras aristotélicas. Este pasaje tiene el mérito de exigir un gran cambio, pero tiene la poca fortuna de no salir de una lógica booleana. El pasaje de la lógica binaria a la lógica modal (de $\mathbf{B}=\mathbf{C}_2$ a $\mathbf{C}_3$) realizado por el pueblo aymará y descubierto en forma abstracta por Lukasiewicz y Post supone un adelanto muy importante porque la lógica obtenida no se asemeja a la booleana. Sin embargo, el camino de los teóricos lleva a reticulados poco interesantes ($\mathbf{C}_4$, $\mathbf{C}_5$, etc.) y no sabemos todavía hasta donde llegan los descubrimientos del pueblo aymará. También hemos visto que se han intentado, en forma embrionaria, pasajes más audaces, a $\mathbf{D}_4$, $\mathbf{D}_5$ o aun a $\mathbf{2D}_4$. Pero estos casos se presentan como intentos solamente. El cambio importante lo introdujo Hegel.

El pasaje de $\mathbf{B}$ a $\mathbf{D}_3$ supone ascender un escalón de complejidad en la comprensión del Universo. Es en este punto donde comienzan las formas lógicas nuevas. La introducción del valor lógico “síntesis” y de un reticulado no distributivo constituye el salto en calidad que permite interpretar en forma dialéctica la ciencia de la lógica. Pero por revolucionario que sea el descubrimiento de Hegel, no es el fin. El estudio de $\mathbf{D}_3$ (o $\mathbf{D}_n$) plantea un desafío formidable, pero es seguro que en estas estructuras no finaliza la ciencia de la lógica.

La ley del cambio de la cantidad en la calidad posee una interpretación en la ciencia de la lógica. Con la acumulación del conocimiento humano se termina por descubrir que el homomorfismo, en el cual se desenvolvía la comprensión del Universo, era incompleto. La estructura lógica necesaria es más compleja. Así por ejemplo, la Mecánica Cuántica sugiere una lógica no distributiva, tal como se menciono. Pero también la Matemática, como se verá algo más adelante, sugiere una estructura lógica más compleja.

El enriquecimiento sucesivo de las estructuras lógicas –que fue intuido en varias oportunidades en el pasado– es el resultado ultimo de los esfuerzos formalizadores y la aplicación directa de la correspondiente ley de la dialéctica. Este esfuerzo parece no tener fin, en concordancia con la tesis central de Lenin sobre la materia.

Parte 3: la deducción

1.13 La implicación

El problema principal de la lógica tradicional es la *deducción*, la *implicación*. Con la lógica binaria las teorías deductivas cobraron un alto vuelo y sin duda cosecharon grandes éxitos. Los "Elementos" de Euclides, los "Principia" de Newton, las "Leyes" de Boole, el "Tratado" de Maxwell o los "Principia" de Russell y Whitehead son algunos de estos resonantes triunfos de las teorías deductivas. En la dialéctica la teoría de la implicación, si bien ocupa un papel importante, no es el centro de la lógica como ocurre en el caso binario. Pero de todos modos, es la teoría de la implicación quien nos resolverá el viejo problema de las vinculaciones entre la dialéctica y la lógica formal, un esquivo problema para las presentaciones intuitivas de la dialéctica, pero un problema simple desde el punto de vista algebraico en que nos hemos colocado.

La implicación es una función lógica, de dos variables, con propiedades formales que permiten fabricar cadenas de proposiciones. Tal vez esta sea la manera más general de caracterizar el problema. La principal sorpresa que nos reserva la teoría de la implicación dialéctica es que no existe una *única* función implicación sino que existe una colección de funciones que poseen esencialmente las mismas propiedades. Ya Lukasiewicz había notado este hecho y había propuesto una definición muy general para la función implicación.

En la interpretación de Lukasiewicz [1] se debe diferenciar dos conjuntos de valores lógicos, el conjunto **A** de los valores verdaderos –que estaba formado usualmente por el valor lógico *1*– y el conjunto **B** de los valores falsos –formado usualmente por todos los demás valores de $\mathbf{C}_n$. Con estos conjuntos, Lukasiewicz propone como propiedad esencial de la implicación que si *x* pertenece al conjunto de valores **A** –los valores verdaderos– e *y* pertenece a –los valores falsos– entonces la función implicación ***f****(x,y)* pertenece a **B**, es decir, es falsa. Pero con esta propiedad no alcanza, todavía es necesario asegurar la propiedad de *separabilidad* (el "Modus Ponens" clásico) que introdujo Russell: si *x* y ***f****(x,y)* son verdaderos, entonces *y* también es verdadero. La combinación de estas ideas nos permite definir las funciones implicación:

Definición 12.1: Una función $f(x,y)$, definida sobre todas las parejas de valores lógicos de un reticulado, se llama *función implicación* si se cumple que $f(x,y)$ no es tesis si y solamente si

- x es tesis
- y no es tesis

En esta definición se emplea el concepto de *tesis* en lugar de la idea general de Lukasiewicz. De hecho se ha considerado que el conjunto **B** de los valores falsos esta formado solamente por 0, a la inversa de lo que consideraba Lukasiewicz. Para la dialéctica las verdades parciales son esencialmente verdades y no falsedades.

Tal como se indicaba antes, sobre un reticulado **L** existe una gran cantidad de posibles funciones implicación. El teorema siguiente aclara el punto:

Teorema 12.1: Si un reticulado **L** posee n valores dialécticos, el número de funciones implicación es $(n+1)^{(n+2).(n+1)+1}$

Demostración 12.1: El reticulado **L** posee $(n+1)$ valores posibles para las tesis. La tabla de verdad de la función implicación posee exactamente $(n+1)$ valores 0 que corresponden a los posibles valores tesis de x junto con el valor $y=0$. Los restantes lugares de la tabla de verdad son:

$$(n+2).(n+1)+1$$

que pueden ser ocupados por cualquiera de los $(n+1)$ valores tesis. De allí el resultado del teorema.

Como es inmediato, en la lógica binaria tradicional, $n=0$ y ocurre entonces que hay solamente una única función implicación. En la lógica modal, definida en $\mathbf{C_3}$, se tiene $n=1$ y hay entonces $2^7 = 128$ funciones implicación. Este número aumenta considerablemente para la lógica hegeliana, con n=3, donde hay 4^{21} funciones, un número aproximado a 10^{12} casos diferentes. Esta multiplicidad de definición de la implicación, por un lado, muestra una realidad nueva, pero por otro lado, se organizan en una teoría muy simple.

Cualquiera de las funciones implicación $f(x,y)$ que se elija se suele representar como:

x Þ y

También se emplea la definición:

$x \Leftrightarrow y$

es tesis si y solamente si x Þ y, y Þ x son tesis. Este símbolo permite expresar cómodamente la doble implicación. Con esta notación la mayoría de los resultados adquieren la familiar expresión de la lógica binaria.

Es interesante observar que la Definición 12.1 cumple la propiedad de separación de implicaciones:

Teorema 12.2: Si las proposiciones p y p Þ q son tesis, entonces, también la proposición q es tesis.

Demostración 12.2: Si ocurriera $q=0$, entonces, por definición, puesto que p es una tesis:

p Þ $q = 0$

en contra de la hipótesis de partida. Luego q debe ser una tesis.

Existe un segundo teorema de carácter muy general que es válido en todos los casos:

Teorema 12.3: En todo reticulado y para toda función implicación si $p \leq q$ entonces p Þ q es una tesis.

Demostración 12.3: Supongamos que p Þ $q= 0$, en contra del resultado. Por la Definición 12.1 se debe cumplir que $q=0$ y que p es una tesis y diferente de 0 por consiguiente. Pero esta situación contradice la desigualdad $p \leq q$. Luego no puede ocurrir que p Þ q no sea una tesis, tal como se debía demostrar.

Con los elementos que se disponen es simple encontrar una gran cantidad de tesis que involucran la implicación. Estas tesis son *inde-*

pendientes de la expresión explícita de la implicación o de la negación empleada. Esta característica es una de las más singulares de la lógica dialéctica y más adelante regresaremos acerca de la importancia de este hecho. Estas tesis se presentan en el Teorema 12.4, como una tabla, con los nombres usuales que poseen. Como las demostraciones son muy similares solamente se demuestran aquellos resultados que aparecen como más representativos.

Teorema 12.4: En cualquier reticulado, para cualquier función implicación y para cualquier negación son tesis las siguientes expresiones:

1	*p* Þ *p*	principio de identidad
2	*p.q* Þ *p*	
3	*p* Þ *p+q*	
4	*p* ⇔ ***NN****p*	negación de la negación
5	*(**N**p* Þ *p)* Þ *p*	reducción al absurdo
6	*(p* Þ *q)* Þ *((r* Þ *p)* Þ *(r* Þ *q))*	propiedad transitiva
7	*(p* Þ *q)* ⇔ *(p* Þ ***NN****q)*	ley de la doble negación
8	*p* Þ *(q* Þ *p)*	
9	*p* Þ *(q* Þ *(p* Þ *q))*	
10	*p* Þ *(q* Þ *(q* Þ *p))*	
11	*(p* Þ *q)* Þ *(Np+q)*	implicación clásica
12	***N****(p+q)* ⇔ ***N****p.**N**q*	ley de De Morgan
13	***N****(p.q)* ⇔ ***N****p+**N**q*	ley de De Morgan
14	*p+q.r* Þ *(p+q).(p+r)*	propiedad distributiva
15	*p.q+p.r* Þ *p.(q+r)*	propiedad distributiva
16	*(q* Þ *p)* Þ *((**N**q* Þ *q)* Þ *p)*	

Demostración 12.4: Todas estas tesis se demuestran con la misma técnica, suponer que valen *0* y aplicar la Definición 12.1. Por este procedimiento se llega a una contradicción. Los Teoremas 12.2 y 12.3 pueden ser de utilidad en algunos casos. Para que la proposición 2 no sea una tesis debe ocurrir *p=0* y que *p.q* sea una tesis y esta situación es contradictoria. La proposición 1 se reduce a la 2, con *p=q*. La proposición 3 se demuestra igual. Existe otro camino posible: las tres primeras proposiciones se encuentran en el caso del Teorema 12.3 y son tesis por lo tanto. Las dos implicaciones que encierra la proposición 4 son similares, si ocurre, por

ejemplo:

$$p \text{ Þ } \mathbf{NN}p = 0$$

debe ocurrir forzosamente que $NNp=0$ o sea $p=0$ en contra de que debe ser una tesis, por definición. En forma similar se demuestra la implicación inversa. Si la proposición 5 fuera falsa se tendría que $\mathbf{N}p$ Þ p es una tesis y $p=0$. Pero si $p=0$ entonces, $\mathbf{N}p=1$ y la expresión 1 Þ 0 no es una tesis, por definición de implicación. Si la proposición 6 fuera falsa debería ocurrir que:

$$(r \text{ Þ } p) \text{ Þ } (r \text{ Þ } q) = 0$$

y que p Þ q fuera una tesis. Pero de la igualdad y de la definición de función implicación resulta que r Þ $q= 0$ y que r Þ p es una tesis. Finalmente, de la definición de implicación, resulta que $q=0$ y que r es una tesis. Pero si $q=0$ y p Þ q es una tesis, debe ocurrir $p=0$; pero entonces como r Þ p, debe ocurrir que $r=0$ en contra de lo ya demostrado que r era una tesis. Luego la proposición 6 es una tesis. Por procedimientos similares se demuestran las proposiciones 8,9 y 10. Si la proposición 7, en alguno de sus casos, no fuera una tesis, se tendría:

$$p \text{ Þ } \mathbf{NN}q = 0$$

en tanto que p Þ q es una tesis. Pero de la igualdad resulta que $\mathbf{NN}q=0$ y que p es una tesis; es decir, que $q=0$, lo cual contradice que tanto p como p Þ q son tesis. La proposición simétrica se demuestra igual. La proposición 11 es una tesis porque en el caso contrario ocurre que:

$$Np+q = 0$$

en tanto que p Þ q. De la igualdad resulta que $q=0$ y $Np=0$, de donde $p=1$; pero esto contradice que p Þ q sea una tesis. Las proposiciones 12 y 13 son inmediatas porque se deducen de la ley de De Morgan y de la proposición 1. Las proposiciones 14 y 15 son consecuencia de las desigualdades distributivas válidas en todo reticulado y del Teorema 12.3. Para que la proposición 16 fuera falsa debería ocurrir que q Þ p fuera una tesis pero que:

$$(\mathbf{N}q \text{ Þ } p) \text{ Þ } p = 0$$

A su vez, esta condición implica que $\mathbf{N}q \text{ Þ } p$ fuera una tesis, pero debería ocurrir $p=0$. Pero entonces, por las dos tesis necesarias, debería ocurrir –en base a la definición de implicación– que $\mathbf{N}q=q=0$ lo cual es imposible. Quedan así demostrados todos los casos.

En forma contraria al Teorema 12.4, existen expresiones que son tesis –en realidad son tautologías– en la lógica binaria pero que no lo son en la dialéctica general. Un grupo interesante se encuentra en el teorema siguiente:

Teorema 12.5: En algún reticulado, para toda función implica y toda negación, las siguientes proposiciones no son tesis:

1	$p \text{ Þ } (\mathbf{N}p \text{ Þ } q)$	axioma de Frege
2	$(\mathbf{N}p \text{ Þ } q) \text{ Þ } (\mathbf{N}q \text{ Þ } p)$	axioma de Frege
3	$q \text{ Þ } (p \text{ Þ } p.q)$	propiedad del producto
4	$(q \text{ Þ } p) \text{ Þ } (\mathbf{N}p \text{ Þ } \mathbf{N}q)$	propiedad del recíproco
5	$(\mathbf{N}p \text{ Þ } \mathbf{N}q) \text{ Þ } (p \text{ Þ } q)$	propiedad del recíproco
6	$(\mathbf{N}p+q) \text{ Þ } (p \text{ Þ } q)$	implicación clásica

Demostración 12.5: La demostración consiste en encontrar un caso donde no se cumpla la proposición enunciada. Basta considerar cualquier dialéctica para encontrar contra ejemplos. En la proposición 1 basta considerar $q=0$ y cualquier valor dialéctico para p; se tiene entonces que $\mathbf{N}p$ es un valor dialéctico y se cumple $\mathbf{N}p \text{ Þ } q = 0$, luego la proposición es nula por definición de la función implicación y no es una tesis. En forma similar se tienen contra ejemplos para los valores:

proposición 2: $p=0$, q dialéctico
proposición 3: p,q dialécticos tales que $p.q=0$
proposición 4: $q=1$, p dialéctico
proposición 5: $q=0$, p dialéctico
proposición 6: $q=0$, p dialéctico

Luego no pueden ser tesis en un caso general.

Los resultados de los Teoremas 12.4 y 12.5 son especialmente importantes y pueden extraerse muchas conclusiones de peso. Comencemos por analizar el significado de algunas de la tesis válidas en general para todas las lógicas con cualquier implicación y cualquier negación. La validez sin restricciones del principio de identidad (proposición 12.4.1), de la validez de la reducción al absurdo (proposición 12.4.5) y de la propiedad transitiva de la implicación (proposición 12.4.6) nos muestran que estos elementos del razonamiento son válidos para cualquier pensamiento dialéctico. Lejos de ser peculiaridades de la lógica booleana, reflejan propiedades mucho más generales, más generales aun que la propia concepción hegeliana del universo. Se completa con estos resultados los ya obtenidos en la Sección 5.

Tienen un interés muy especial las tesis de doble negación (proposiciones 12.4.4 y 12.4.7) que reflejan propiedades esenciales del pensamiento dialéctico. Toda proposición implica y es implicada por su doble negación; si una proposición implica a otra, implica también a su doble negación: estos resultados son válidos en general, si bien se convierten en casos triviales cuando la doble negación se convierte en la función identidad.

Por el contrario, existen grupos de tesis que solamente son válidas en un ambiente booleano o en ciertos reticulados particulares. Comencemos por un caso muy importante: los cuatro axiomas de Frege. Este grupo esta formado por las proposiciones 12.4.5 12.5.1 12.5.2 y 12.4.6; Como podemos apreciar, dos no son válidos en general. Pero más aun. Los contra ejemplos se cumplen en cualquier lógica diferente de la booleana. El grupo de axiomas de Frege es sumamente particular del caso binario. Pero lo mismo ocurre con otras axiomatizaciones clásicas de la lógica deductiva. En el caso de los cuatro axiomas de Hilbert y Ackermann, solamente el cuarto no es de carácter general. Esta propiedad de los axiomas clásicos es de carácter general puesto que los resultados negativos del Teorema 12.5 indican que cualquiera sea la axiomatización elegida, existen axiomas no válidos en general; de otro modo el Teorema 12.5 sería falso.

El punto clave de la teoría de la implicación se encuentra en la propia definición de las funciones. En la lógica clásica, de una manera o de otra, se toma de conocida definición de Russell de la función implicación. El siguiente teorema aclara esta situación:

Teorema 12.6: La función $\boldsymbol{N}x+y$ no es una función implicación excepto en el caso de la lógica booleana binaria.

Demostración 12.6: Si bien se cumple que la función

$$\boldsymbol{N}x+y=0$$

para $y=0$ y $\boldsymbol{N}x=0$ –o sea para $x=1$– y se verifica una de las condiciones de la Definición 12.1, no se cumple la condición inversa. En efecto, para $y=0$, para todo valor dialéctico que tome x, la función no vale 0 como corresponde.

El resultado del Teorema 12.6 explica la diferencia fundamental de la deducción booleana binaria con todos los demás casos. En particular, se cumple que esta función no puede ser considerada una implicación *tampoco en los casos booleanos no binarios*. A pesar de que la lógica es distributiva y la negación principal es involutoria, esta función no cumple con propiedades elementales de la implicación. En el caso $\mathbf{B}^2=\mathbf{D}_2$ se cumple el teorema 12.5 y por lo tanto, los axiomas de Frege no son válidos.

Podría pensarse que la Definición 12.1 es arbitraria y que la clásica definición de Russell es la adecuada. Sin embargo es sencillo convencerse de que no es así. La definición de la función implicación se basa en que el único valor que debe ser considerado como definitivamente *falso* es 0, todos los demás valores lógicos participan de la verdad, aunque sea en forma parcial. Por el contrario, la función clásica de implicación se basa en la situación opuesta. Si se considera que todos los valores lógicos, excepto 1, son *falsos*, entonces la definición clásica es aceptable. Por las propiedades distributivas de las operaciones y por la propiedad involutoria de la negación, en toda lógica booleana $\mathbf{B}^n$ se obtienen tautologías aplicando a los axiomas de Frege –o a cualquier otro conjunto completo de axiomas– las reglas de la implicación. Pero algo importante se ha perdido.

La definición clásica de implicación deja de lado todas las situaciones dialécticas. Así por ejemplo, en la lógica yin–yang, es decir en $\mathbf{B}^2=\mathbf{D}_2$, se deben considerar falsos a los valores *yin* y *yang* (o *tesis* y *antítesis*). Con esta interpretación, todas las aplicaciones de esta dialéctica desaparecen. Simplemente no se puede razonar con los valores dialécticos, en contra de los ejemplos de la Sección 7.

La teoría general de la implicación debe continuarse con ideas generales. Sobre reticulados particulares y con negaciones especiales se pueden encontrar sorpresas. El siguiente teorema advierte de los riesgos de no proceder en forma abstracta:

Teorema 12.7: Existen proposiciones que son tesis o no según sea el reticulado y la lógica considerada.

Demostración 12.7: Consideremos la proposición:

*p.***N***p* Þ *0*

La demostración del teorema consiste en verificar que existe un reticulado y una negación para los cuales la expresión *x.***N***x* puede ser *diferente de 0* así como existe otro reticulado y otra negación para los cuales la expresión es siempre idéntica a *0*. En el primer caso, la proposición considerada no es una tesis. En el segundo caso, la proposición es una tesis. Con esos ejemplos queda demostrado el teorema. Los ejemplos son simples. En $\mathbf{D_3}$, con la negación ***N****=(01)*, la expresión *x.***N***x* es diferente de *0* para los valores dialécticos. También en $\mathbf{D_3}$, con la negación ***N****=(01)(tas)* ocurre lo contrario.

Para completar el panorama de la teoría de la deducción es necesario mostrar que se construye así una teoría deductiva. Esto quiere decir que existe un grupo de axiomas tal que toda tesis se deduce de los axiomas y que todo cuanto se deduce de los axiomas es una tesis. La presentación deductiva de la implicación dialéctica será estudiada en próximos trabajos.

1.14 La paradoja de Epiménides y otras paradojas proposicionales

La existencia de paradojas en la lógica suele ser uno de los puntos de dificultad para las teorías de los lógicos. Toda paradoja encierra una verdad nueva; lejos de ser un atolladero de una teoría, es un manantial de nuevas ideas. Pero esta manera de observar las contradicciones es una manera esencialmente dialéctica. Muchos autores expresaron su admiración por las paradojas. W.K. Chesterton no podía pensar sino a través de una paradoja. Wilde decía con mucho acierto:

> El camino de la verdad es el camino de las paradojas. Para verificar la Realidad es necesario verla en la cuerda floja. Cuando las verdades se convierten en acróbatas, recién se puede juzgarlas. [12]

Las paradojas en la lógica binaria pueden ser clasificadas en dos grandes tipos, las paradojas que se originan en ecuaciones proposicionales y las paradojas que se originan en ecuaciones funcionales. En su fondo común se caracterizan porque una presentación que se encuentra dentro de limites aceptables de la lógica conduce a una *contradicción*. La lógica clásica binaria puede soportar todo excepto una contradicción y de allí que aparezca un problema. En la lógica dialéctica esta contradicción no presenta dificultades.

Las paradojas lógicas son resueltas por los lógicos en un estilo brutal: los procedimientos operativos que llevan a formular las ecuaciones contradictorias no son correctos. Suele invocarse con bastante insistencia la noción de *meta*–nivel y la imposibilidad de que la lógica opine sobre la lógica. Esta solución quirúrgica, de extirpar todo lo que molesta, impide obtener de las paradojas toda la riqueza de contenido que poseen.

En esta sección, tomando como modelo la paradoja de Epiménides, se analizan paradojas que se originan en ecuaciones proposicionales. En la sección siguiente se hace lo propio, tomando la paradoja de Russell, con las situaciones funcionales.

La paradoja de Epiménides –o la paradoja de los mentirosos– presenta, en la forma más simple, la limitación básica de la lógica binaria. En su forma clásica –ver [21] para esta y otras paradojas que siguen– se supone que Epiménides, el cretense, enuncio la frase:

“todos los cretenses son mentirosos”

La paradoja nace de la confrontación entre este enunciado y el enunciado implícito:

“el autor del enunciado anterior es cretense”

Se han realizado muchas otras presentaciones de la paradoja, con diferentes grados de complejidad, pero en la forma presuntamente original es donde se encuentra toda la riqueza del problema.

Comencemos por una afirmación metodológica que la mayoría de los lógicos no aceptaran: *nada impide que una persona imite a Epiménides y enuncie una frase que conduzca a la misma paradoja*. El cerebro de esta persona no estalla ni se bloquea al intentar esta operación presuntamente prohibida, nada ocurre en el mundo material. Aquí se encuentra el verdadero problema que los lógicos omiten. Si el cerebro y el universo fueran profundamente binarios, estos enunciados no se podrían hacer, del mismo modo que no se puede caminar por las paredes o burlar las leyes de la termodinámica, por muy retórico y hábil que se sea con las palabras.

Dicho todo de otra manera, lo verdaderamente sorprendente en la paradoja de Epiménides es que no existe ninguna repugnancia, ninguna violencia natural, ninguna imposibilidad física en enunciaría. Cualquier hombre razonable –y hasta un lógico de profesión– puede entender el enunciado:

“yo miento”

a pesar de que encierra todo el problema de Epiménides. Es simplemente absurdo suponer que este enunciado cotidiano –los hombres mienten frecuentemente y, a veces, lo confiesan– sea imposible. Solamente una posición idealista radical puede imaginar que el enunciado debe ser desterrado de la vida de los hombres por ser imposible para el pensamiento. Desde un punto de vista materialista, la paradoja de Epiménides encierra una trampa artificial que no ocurre en el mundo real.

Es frecuente afirmar que la paradoja nace de una confusión de jerarquías de enunciados. Desde el momento en que una afirmación juzga la validez de otra afirmación se sostiene que se ha superado un nivel y que se ha pasado de la *lógica* a la *meta–lógica*. Esta manera fácil de interpretar las paradojas fue puesta de moda por Russell para escapar a su paradoja sobre las clases y popularizada por Tarski para escapar de las demás paradojas.

La manera clásica de escapar a la paradoja es equivocada. Como presentaremos en lo que sigue, el fondo del problema de Epiménides –porque no debemos continuar llamándolo paradoja una vez que sabemos que no existe– no se encuentra en una mezcla de jerarquías sino en la pretensión de encontrar una solución binaria a un problema lógico no binario. De hecho Quine [21] ya había adelantado esta idea, pero en forma muy embrionaria.

A efectos de precisar el análisis del problema de Epiménides, aceptemos la siguiente versión, algo más precisa:

a: la siguiente afirmación es falsa
b: la anterior afirmación es verdadera

No cabe duda que la paradoja nace de suponer que el enunciado *a* es "verdadero" puesto que entonces *b* es "falso" y de allí resulta que *a* no es "verdadero". Algo similar ocurre si suponemos que el enunciado **a** es "falso". Como el enunciado **a** no puede ser ni "verdadero" ni "falso", se plantea la presunta paradoja de Epiménides. En un estudio de la dialéctica es natural afirmar que **a** posee un valor diferente de "verdadero" y de "falso". Pero analizaremos con mayor detalle los pasos para llegar a este punto.

Supongamos que procedemos con auxilio de la lógica espontanea del cerebro, sin dejarnos atrapar en dificultades artificiales. Es claro que los enunciados del problema de Epiménides también se pueden formular como:

a dice que el enunciado *b* es falso
b dice que el enunciado *a* no es falso

Hasta ahora hemos cambiado "verdadero" por la negación de "falso", lo que no parece inquietar demasiado. Consideremos la función:

$\boldsymbol{f}(x)$ = "el enunciado *x* es falso"

Con esta función, el problema de Epiménides se convierte en:

$a = \boldsymbol{f}(b)$
$b = \boldsymbol{Nf}(a)$

El primer enunciado dice: *a* establece que *b* es "falso". El segundo enunciado dice: *b* establece que *a* no es "falso". El problema de Epiménides consiste en estudiar si estas ecuaciones poseen o no una solución.

La solución clásica consiste en negar que el problema posea significado. La función ***f***(x) por un lado debe ser una función proposicional, pero por otro, debe ser una función lógica. Este es el argumento de confusión de niveles que se suele invocar para escapar a la paradoja. Pero seamos algo más amplios de criterio y sigamos adelante. Aceptemos que ***f***(x) pueda ser una función lógica y que sea válido opinar sobre la validez de una preposición. En este caso la contradicción continua de esta manera. Es muy claro que ***f***(x) solamente puede ser una de las dos únicas funciones lógicas binarias que existen: ***f***$(x)=x$ o ***f***$(x)=\mathbf{N}x$. Es razonable suponer que nos debemos referir a la segunda. Si suponemos que la función coincide con la primera, lo cual ya evidencia un gusto singular por la interpretación de la afirmación "x es falso", se llega a la ecuación final: $a = \mathbf{N}a$.

Con esta interpretación, el problema de Epiménides consiste en resolver el sistema de ecuaciones lógicas:

$$a = \mathbf{N}b$$
$$b = \mathbf{NN}a$$

Vale la pena notar que no hemos supuesto que la negación sea una operación involutoria. Si reemplazamos b en la primera ecuación se llega a:

$$a = \mathbf{NNN}a$$

Esta ecuación posee solución en una multitud de lógicas posibles. Así por ejemplo, en la lógica hegeliana, a puede tomar uno cualquiera de los tres valores dialécticos de *tesis*, *antítesis* o *síntesis*, cualquiera sea la negación que se considere. Aun en lógicas donde la negación sea de segundo grado –cosa que también ocurre en algunas negaciones hegelianas–, la ecuación resultante:

$$a = \mathbf{N}a$$

posee solución. Así por ejemplo, en la lógica modal definida en $\mathbf{C_3}$ existe solución. En la lógica hegeliana, en $\mathbf{D_3}$, con la negación $\mathbf{N}=(01)$ existen tres soluciones. Aunque parezca sorprendente, también existen soluciones en las lógicas booleanas de grado mayor que *1*, por ejemplo para la negación ***N*=*(01)***: es claro que en la lógica yin–yang, tanto *yin* como *yang* son soluciones para esta negación. En resumen, el único problema que existe es decidir si un sistema de ecuaciones lógicas posee o no solución en un determinado ambiente lógico, no otra cosa. Más aun, las soluciones que hemos encontrado nos autorizan a traducir a un lenguaje directo el resultado obtenido:

> los cretenses solamente enuncian tesis estrictas, jamás verdades o falsedades

y en este maravilloso resultado se ha convertido la pretendida paradoja de Epiménides. Vale la pena observar que si se pretende extraer el significado de la frase “yo miento” mediante una actitud espontanea, se llegara a la simple conclusión que la persona que realiza tal afirmación no es digna sino de un crédito parcial. Sus afirmaciones poseen un estigma de duda, por ejemplo, característico de la lógica modal o un estigma de validez temporal, característico de la lógica hegeliana.

Es interesante observar que existe una manera muy simétrica de enunciar el problema de Epiménides, mediante tres afirmaciones:

a: la afirmación *b* es falsa
b: la afirmación *c* es falsa
c: la afirmación *a* es falsa

De aquí resulta, con un análisis similar al realizado, que *a* debe coincidir con su *triple* negación. Por este procedimiento se podría continuar. Como se comprende, en los casos que se realice *un número par* de enunciados existe solución binaria y ni siquiera hay paradoja. En cambio, basta que el número sea impar para que el mundo lógico se derrumbe. Esta sensibilidad a la paridad de los números no se vincula con las jerarquías de interpretación y los meta–enunciados sino con la existencia o no de soluciones de un vulgar sistema de ecuaciones. Parece increíble que el problema de la existencia de soluciones de un sistema pueda ser considerado como fundamental y que se piense que se tambalean los cimientos de la lógica con un ejemplo trivial de sistema de ecuaciones sin solución. Algo similar le ocurrió a la matemática cada vez que encontró un problema sin solución, pero la experiencia secular de los matemáticos, luego de examinar los problemas, se aventuro valientemente dentro de otros campos numéricos. Esta aventura dejó marcas profundas en la matemática. Los números “irracionales” o los números “imaginarios” muestran dos claras heridas en el orgullo matemático de quienes pretendieron resolver dos simples ecuaciones de segundo grado. Exactamente lo mismo le ocurrió a la lógica con el problema de Epiménides.

Si bien el problema de Epiménides es la más conocida paradoja proposicional, existen otros ejemplos interesantes. Un ejemplo clásico, cuyo origen si pierde en las historias medievales, lo constituye el problema del condenado a muerte. En su planteo, a un condenado se le da la opción de elegir la forma de morir, con la salvedad de que si miente, va a morir ahorcado; si dice la verdad, morirá decapitado. Como es fácil imaginar, un condenado hábil declara que *va a morir ahorcado*. La paradoja es similar a la de Epiménides. Supongamos que realizamos las siguientes identificaciones proposicionales:

a = el enunciado que dice el Condenado a muerte
b = el Condenado muere ahorcado
N*b* = el Condenado muere decapitado, no hay otra opción

Con este planteo el problema se reduce a tres enunciados:

$a \Rightarrow \mathbf{N}b$	si dice la verdad muere decapitado
$\mathbf{N}a \Rightarrow b$	si miente muere ahorcado
$a = b$	elección del Condenado

Con estas ecuaciones, es claro que se llega a las ecuaciones:

$$\mathbf{N}a+\mathbf{N}b = 1$$
$$\mathbf{NN}a+b = 1$$
$$a = b$$

La primera ecuación indica que $\mathbf{N}a=1$, es decir, $a=0$. La segunda ecuación indica $\mathbf{NN}a+a=1$ que contradice a la primera. Vale la pena notar que no se ha empleado en ningún momento el hecho de que se trate de una lógica binaria, excepto en la definición de implicación. Nos encontramos aquí con un sistema de ecuaciones lógicas, que involucran la función implicación y que *no poseen solución*. La paradoja se reduce a esta comprobación. El sistema de ecuaciones no es compatible, nada grave ocurre, solamente se ha propuesto un problema sin solución.

Examinemos el problema desde el punto de vista dialéctico. En este caso ya no se puede reemplazar simplemente la función implicación por una expresión equivalente. Pero sin necesidad de este reemplazo, en la dialéctica hegeliana, para la negación ***N****=(01)(tas)*, existe solución para:

a = b = tesis
tesis Þ *antítesis*
antítesis Þ *tesis*

y el problema posee solución. También son solución los valores *antítesis* o *síntesis*. En la dialéctica yin–yang, es decir en la lógica booleana $\mathbf{B}^2$, también son solución tanto *yin* como *yang*. Todo esto nos muestra que la interpretación de la función implicación permite extender los alcances de la lógica y resolver el problema del condenado. Su enunciado “voy a morir ahorcado” *posee valor de tesis* pero no es “verdadero”. Interpretado en el pensamiento corriente, nada hay de compulsivo, tanto puede morir de una manera como de otra, lo cierto es que morirá. En cambio, en la lógica clásica la paradoja nace de que no puede resolver el hecho de que *un condenado a muerte* se salve porque un sistema de ecuaciones no posee solución y no se puede decidir el procedimiento de su ejecución.

El interés de la paradoja del condenado reside en la interpretación de la función implicación. Lo mismo ocurre con la paradoja de Protágoras, citada, por ejemplo, en [22]. En este problema clásico, Protágoras ha instruido a un alumno en el arte de pleitear, con la condición de que le pague cuando gane un juicio. La paradoja nace de que si el alumno se niega a pagar y Protágoras le entabla juicio se llega a un problema sin solución. Cualquiera sea el resultado del juicio, no se puede concluir lógicamente si el alumno debe o no pagar.

Examinemos el problema con las siguientes proposiciones:

a = Protágoras recibe su pago
b = el alumno gana un juicio
c = Protágoras gana el juicio a su alumno

El problema es muy rico en enunciados para expresar todos los vericuetos legales. Las posibilidades para Protágoras son:

b Þ *a*	contrato inicial: gana, cobra
***N**a* Þ ***N**a*	contrato inicial: no gana, no cobra
c Þ *a*	pleito: gana, recibe el pago
c Þ ***N**b*	pleito: gana, consecuencia indirecta
***N**c* Þ *Na*	pleito: pierde, no cobra
***N**c* Þ *b*	pleito: pierde, consecuencia indirecta

Es sencillo convencerse que estas seis ecuaciones, con la definición clásica de implicación, carecen de solución. En cambio, en términos dialécticos el problema es diferente. En cualquier lógica dialéctica simple todos los valores dialécticos se implican mutuamente. En el análisis de la paradoja anterior hemos podido emplear este resultado. De acuerdo con esto, el problema posee solución y *las tres proposiciones toman valores dialécticos*. Se resuelve así el "sentido común" y se logra una solución al problema legal: las tres proposiciones son tesis y es natural que Protágoras reciba su pago, juicio o no.

De los ejemplos anteriores no debe pensarse que todo problema posee solución en alguna lógica dialéctica. Todo problema de lógica proposicional puede ser expresado como un sistema de ecuaciones del tipo:

$$E_1 = E_2 \;\ldots\; E_p = E_q$$

donde E_i son expresiones lógicas con un cierto número de proposiciones incógnitas. No imponemos ningún tipo de restricción al problema. En la lógica clásica se imponen muchas restricciones. Solamente se acepta que los segundos miembros sean *1*, es decir, que se tengan condiciones "verdaderas" (o "falsas" lo que equivale a la negación de la expresión considerada). En la lógica clásica, para evitar el problema de las referencias recíprocas, no se acepta la posibilidad de escribir la igualdad de dos expresiones ni la mezcla de variables. Pero nada de esto evita que existan sistemas de ecuaciones lógicas sin solución.

Consideremos una función lógica que tenga las propiedades de la disyunción excluyente. El lenguaje cotidiano posee una buena cantidad de conjunciones distributivas que expresan esta función lógica; en castellano hay más de media docena de maneras de expresarla. En la dialéctica, como reflejo de esta situación, existe toda una familia de funciones de dos variables que corresponden con esta idea lógica:

Definición 13.1: Se llama función **O** *excluyente* –o *EXOR*– a toda función de dos variables que cumpla con $\mathbf{f}(x,y) = 0$ si y solamente si $x = y$.

La función EXOR se expresa con el signo Æ: x Æ y. Estas funciones poseen algunas propiedades de interés:

Teorema 13.1: El número de funciones EXOR en un reticulado que posee n elementos dialécticos es:

$$(n + 1)^{(n + 2)(n + 1)}$$

Demostración 13.1: Se trata de distribuir $(n + 1)$ valores diferentes de 0 en $(n + 2)(n + 1)$ parejas de valores de las variables y de allí el resultado.

Teorema 13.2: El antónimo (ver Sección 5) de toda función EXOR es una función EXOR.

Demostración 13.2: Basta con observar que

$\mathbf{N}x$ Æ $\mathbf{N}y = 0$ si y solamente si $\mathbf{N}x = \mathbf{N}y$ luego, si y solamente si $x = y$

Con ayuda de las funciones EXOR todo sistema de ecuaciones se puede expresar como una única expresión igual a 0 (o 1 según se desee):

Teorema 13.3: Todo sistema de ecuaciones lógicas es equivalente a una única ecuación $E=0$ (o $\mathbf{N}E=1$, en forma equivalente).

Demostración 13.3: Es claro que son ecuaciones lógicas equivalentes:

$E_1 = E_2$ si y solo si E_1 Æ $E_2 = 0$

como es inmediato de la Definición 13.1. Por otra parte, una suma lógica es 0 si y solamente si son nulos cada uno de los sumandos. Luego, todo sistema lógico es equivalente a la única expresión:

$$E_1 Æ E_2 + ... + E_p Æ E_q = 0$$

tal como se debía demostrar.

El Teorema 13.1 pone de manifiesto que nada se gana con imponer restricciones a la manera de proponer problemas lógicos, *la existencia de problemas sin solución es una consecuencia directa de la existencia de expresiones que son tesis*. Este resultado pone punto final al problema de las paradojas proposicionales. Al margen de que algunas de las paradojas clásicas poseen solución en las lógicas dialécticas, también en las lógicas dialécticas se pueden formular paradojas, es decir, sistemas de ecuaciones sin solución. Este hecho no afecta en nada la capacidad de la lógica para analizar y conocer científicamente al universo, del mismo modo que la existencia de sistemas de ecuaciones sin solución, tampoco afecta la capacidad del álgebra para estudiar científicamente al universo. Estos problemas son solamente un nuevo desafío a extender las teorías más allá.

1.15 La paradoja de Russell y otras paradojas funcionales

En rigor, ya la paradoja de Epiménides es un problema funcional. Sin embargo el carácter funcional desempeña un papel menor. Estudiaremos aquí los problemas que poseen un marcado carácter funcional. Dentro de estos problemas se destaca con nitidez la llamada paradoja de Russell. Por la importancia desde el punto de vista teórico, esta paradoja es un punto de atención importante para la comprensión dialéctica de la matemática.

Comencemos el estudio en el punto donde suele comenzar el problema, en la llamada *paradoja de los barberos*. Para esto definamos la función proposicional:

$\boldsymbol{F}(x,y)$ = "x **afeita a** y"

Esta función esta definida sobre el conjunto de los hombres –de una cierta localidad, para fijar las ideas. Sea b el barbero de la localidad. En el enunciado del problema, el barbero afeita a todos los que no se afeitan por sí. Esta condición se puede expresar como una tabla de verdad:

$\boldsymbol{F}(x,x)$	$\boldsymbol{F}(b,x)$
0	1
1	0

En esta tabla se establece la doble condición en la cual actúa el barbero. Así planteado el problema, resulta entonces la ecuación proposicional:

$$\boldsymbol{F}(b,x) = \boldsymbol{N}\ \boldsymbol{F}(x,x)$$

La paradoja nace al aplicar esta ecuación al propio barbero porque se tiene:

$$\boldsymbol{F}(b,b) = \boldsymbol{N}\ \boldsymbol{F}(b,b)$$

En la lógica binaria esta ecuación carece de solución. Llegados a este punto debemos destacar dos aspectos del problema. El primero es que no cualquier ecuación funcional que caprichosamente se nos ocurra tiene que poseer solución. Este es un resultado conocido desde mucho tiempo atrás en la matemática. Es fácil comprender entonces que la llamada paradoja no es otra cosa que un problema sin solución, por ingeniosa y plausible que parezca el planteo. El segundo aspecto que interesa destacar es que en una infinidad de lógicas –por ejemplo en la lógica modal– existe solución para el problema y esta establece que “el barbero” afeita a “el barbero” posee el valor de tesis. Esta solución no es un simple juego de variables. En lo rudimentario del planteo del problema de los barberos se han dejado muchas definiciones de lado. Por ejemplo, se ha considerado con demasiada ligereza el problema de la cantidad de barberos en la región y el carácter “verdadero” en forma absoluta de que existan personas que jamás se afeitan a sí mismas así como tampoco se definen todos los casos posibles restantes.

Consideremos ahora la paradoja de Russell, muy similar al problema de los barberos. Una clase se define por una propiedad $\boldsymbol{p}(x)$. Para cada individuo x se sabe si la propiedad $\boldsymbol{p}(x)$ es “verdadera” o “falsa” (en el planteo de la lógica binaria). Aceptemos, tal como en forma espontanea acepto Russell, que x también pueda ser una propiedad. Podemos entonces estudiar cual es el valor de $\boldsymbol{p}(\boldsymbol{p})$: “verdadero” o “falso”. Sea entonces la función:

$$F(p) = N\, p(p)$$

que expresa la propiedad que ***p*** no posee la propiedad ***p***. Hemos construido así la función proposicional ***F*** que comprende las clases que no se contienen a sí mismas, según el enunciado clásico.

Veamos ahora la pretendida paradoja. Al igual que en el caso de los barberos, aquí hay una ecuación funcional que –eventualmente– podría no poseer solución. El problema de Russell ocurre cuando se elige ***F*** como propiedad a estudiar. Se llega así a:

$$F(F) = N\, F(F)$$

Como ya conocemos esta ecuación no posee solución en la lógica binaria pero sí en otras lógicas dialécticas, con el valor *tesis* por ejemplo. Cabe preguntarse si esta respuesta conduce a algo interesante o si es una simple salida artificiosa. En las secciones siguientes –y en especial al revisar la noción de clase– se mostrara claramente la importancia de este resultado. El problema de fondo se encuentra en el hecho que un elemento *x* pertenece a una clase *p* (valor “verdadero”), no pertenece (valor “falso”) o pertenece en forma dialéctica (valor *tesis*, etc.). Por esta razón no es artificioso el resultado de Russell, en lugar de ser un obstáculo, es una clara demostración que la noción de clase debe ser extendida en forma dialéctica.

En resumen, la existencia de ecuaciones funcionales sin solución en una determinada lógica no es una paradoja sino un problema conocido. La matemática ya había descubierto este hecho.

1.16 El teorema de Gödel y los problemas de la matemática

El célebre teorema de Gödel es el principal tema para estudiar la vinculación de las teorías formales con la interpretación dialéctica del universo. Este caso es el más alambicado esfuerzo de los lógicos por ignorar las limitaciones de la lógica binaria para comprender la matemática y las teorías formales suficientemente ricas como para contener a la aritmética.

El problema de Gödel deber ser analizado cuidadosamente para poder diferenciar aquello que verdaderamente demuestra de aquello que *interpreta*. Antes de entrar a este punto es conveniente revisar algunos conceptos de la lógica clásica.

El primer punto a repasar es el conocido argumento por absurdo. En la tesis 12.4.5 se muestra que esta forma de argumentación es válida en *todas* las lógicas dialécticas. Si ocurre que:

$$\mathbf{N}p \text{ Þ } p$$

entonces, por esta tesis y la propiedad de separación (Teorema 12.2) resulta que p es una tesis. Es sumamente importante observar que la reducción al absurdo no tiene nada que ver con el llamado “tercero excluido” ni con el llamado “principio de contradicción”, es una propiedad más profunda de la lógica.

El examen de la argumentación matemática nos muestra que las formas de deducción empleadas son muy pocas y muy precisas. En lo esencial, todo argumento matemático se reduce a una cadena de implicaciones a la cual se agregan algunas tesis particulares. Sin duda las tesis que permiten la separación y la reducción al absurdo son las más empleadas. Sin embargo, en algunas oportunidades, los matemáticos emplean argumentos que recurren a otras tesis. En estos casos es necesario suma cautela porque puede ocurrir que una argumentación sea válida *solamente* en la lógica binaria y no sea válida en general.

El resultado de Gödel es uno de estos casos especiales en el cual se juntan cadenas lineales de argumentos con tesis que no son válidas en general. En su planteo original [23] se procede de esta manera:

- se fabrica un aparato aritmético que permite expresar enunciados lógicos y enunciados matemáticos.
- se construye una proposición (muy compleja), que llamaremos G, cuyas propiedades se estudian.
- se demuestran dos proposiciones:

  $G \text{ Þ } \mathbf{N}G$

  $\mathbf{N}G \text{ Þ } G$
- se concluye de aquí que o bien la aritmética es inconsistente o bien existen proposiciones no demostrables, como G. *Este es el punto que debe ser interpretado nuevamente*.

En la lógica binaria se recurre a la proposición 12.5.1 –que ha sido elegido por Frege como un axioma de la lógica– y se argumenta que al demostrar que tanto *p* como ***N**p* son tesis, entonces toda proposición es tesis. Pero sabemos que este resultado no es válido en general. Es obvio que una proposición puede tomar el valor "tesis" y que su negación puede tomar, entonces, el valor "antítesis" sin que nada grave ocurra. Examinemos el problema de Gödel en términos dialécticos.

Gödel demuestra –mediante cadenas lineales de razonamientos– las dos proposiciones mencionadas. Estas dos proposiciones nos dicen, *razonando por absurdo*, que tanto *G* como ***N**G* son tesis, lo cual nos indica que *poseen un valor dialéctico*. En definitiva, la tesis de Gödel indica que todo sistema axiomático, con suficiente amplitud como para contener la aritmética, posee proposiciones *dialécticas* a pesar de intentar fabricar solamente verdades estrictas.

La principal conclusión del teorema de Gödel es la siguiente: no es posible analizar el universo en términos de "verdadero" y "falso", basta con muy poco –la aritmética– para necesitar enunciar tesis dialécticas.

Dentro de la matemática se tiene otro resultado interesante. Los matemáticos "constructivistas" adoptaron como posición teórica el desconfiar de los razonamientos por absurdo. Esta posición refleja una cierta incomodidad frente al abuso de los razonamientos no lineales. Entendemos que algo de verdad existe en esta manera de contemplar la matemática. Sin embargo, no es el razonamiento por absurdo el que posee dificultades sino algunos otros razonamientos que emplean premisas no válidas desde el punto de vista dialéctico. El resultado de Gödel advierte que existen en la matemática proposiciones que son tesis pero no tautologías y este es el punto a observar con cuidado.

Un caso relacionado con los anteriores lo plantean las proposiciones que hacen referencia a propiedades matemáticas todavía no conocidas. Pensemos, a titulo de ejemplo, en la conjetura de Golbach (todo número par es la suma de dos primos), en el problema de Fermat (teorema de Pitágoras con exponente mayor que 2) o la simple afirmación que en el desarrollo decimal de π exista 100 veces seguidas el dígito 8. A partir de una proposición no conocida se pueden realizar especulaciones sumamente interesantes las cuales se encuentran dentro del ámbito de la dialéctica.

Es interesante ilustrar estos problemas con un ejemplo matemático real muy simple. Consideremos el problema clásico de demostrar que un número irracional elevado a otro irracional puede dar un resultado racional. Existe una demostración –no aceptada por los matemáticos constructivos– que se encuentra en el ámbito de la dialéctica.

Sea a = *Ö2* y consideremos las proposiciones:

p = existen dos números que cumplen con el teorema
$q = a^a$ es un número racional

Es inmediato que es una tesis:

q Þ p

puesto que si q es una tesis, el teorema también es una tesis. Pero también es una tesis:

Nq Þ p

puesto que si a^a es irracional, entonces como:

$(a^a)^a = a^2 = 2$

también se pueden encontrar dos irracionales en las condiciones pedidas. De aquí sigue que el teorema es una tesis por la proposición 12.4.16 y la propiedad de separabilidad.

Existe una observación importante. No se puede demostrar que el teorema es "verdadero" sino que es una tesis en sentido dialéctico. En el fondo, la aplicación de un razonamiento no lineal hace que se obtenga un resultado más débil que los usuales en la matemática. En este sentido los matemáticos constructivistas tienen razón. No tienen razón, en cambio, en disputar la validez del teorema.

Este resultado ilustra las nuevas posibilidades de análisis que suministra la dialéctica para algunos problemas matemáticos clásicos. El futuro desarrollo de la teoría permitirá, seguramente, resultados todavía más importantes y más espectaculares. En otras palabras, ya la matemática exige una lógica más compleja que la binaria. Es plausible que solamente una lógica de Hegel sea capaz de comprender la matemática del siglo XX. Ha ocurrido un salto en calidad.

Parte 4: las funciones lógicas

1.17 Las afirmaciones

La cantidad de funciones posibles crece en forma potencial con el número de elementos del reticulado considerado. Los primeros ejemplos de lógicas dialécticas nos muestran claramente este hecho:

	reticulado	funciones de una variable	funciones de dos variables
lógica binaria	$\mathbf{B} = \mathbf{D_0}$	4	16
lógica aymará	$\mathbf{C_1} = \mathbf{D_1}$	27	19 683
dialéctica yin–yang	$\mathbf{B}^2 = \mathbf{D_2}$	256	$\sim 4 \times 10^9$
dialéctica de Hegel	$\mathbf{D_3}$	3 125	$\sim 3 \times 10^{17}$

Esta multitud de funciones en las lógicas dialécticas se presenta como un hecho desconcertante y difícil de interpretar. Hay un punto que es claro: las funciones lógicas de interés son de *una* o de *dos* variables. Hasta el momento no se han identificado funciones lógicas de tres o más variables que posean interés especifico. También es claro que todas las funciones no poseen igual importancia. La multitud de funciones se pueden agrupar en tres grandes colecciones:

- las funciones que generalizan la lógica binaria
- las funciones propias de la dialéctica
- las funciones que poseen escaso interés lógico

El primer grupo de funciones esta formado –además de las negaciones– por las cuatro funciones elementales de la lógica binaria: las disyunciones, las conjunciones, las funciones implicación y las funciones "EXOR". Por esta razón, a esta altura del presente trabajo podemos considerar agotado el primer grupo de funciones.

Es perfectamente comprensible que existan funciones con escaso interés para la dialéctica: la tercera colección de funciones se obtiene por descarte.

Sin duda el grupo más interesante y más difícil de caracterizar corresponde a las funciones que son propias de la dialéctica. Poseemos pocos recursos de análisis y descubrimiento en este tema. Por esta razón es uno de los campos en el cual el estudio futuro probablemente obtenga los resultados más interesantes. El punto de partida es la realidad material. ¿Acaso son realmente necesarias todas estas funciones para comprender el Universo? ¿Cumplen con algún papel en el pensamiento?

Los estudios –especulativos en su totalidad– realizados sobre las lógicas modales no aclaran demasiado este panorama. En la lógica $\mathbf{C_n}$, Lukasiewicz agrega dos funciones modales: *certidumbre* (Gewissheit) y *posibilidad* (Möglichkeit). Estos agregados no ilustran en nada lo que sucede en las restantes dialécticas.

La primera respuesta que va más allá de la lógica binaria y de la especulación la ha dado la lógica aymará. Iván Guzmán de Rojas [19] sugiere que las 27 funciones posibles poseen uso en la lengua aymará y presenta explícitamente los sufijos correspondientes a 23 de las funciones. Sin embargo, la existencia de múltiples sufijos equivalentes –identifica 45 sufijos que corresponden a las 23 funciones encontradas– permite suponer que en futuros estudios se mejore este conocimiento de las funciones de una variable y se logre establecer una correspondencia más estrecha entre sufijos y funciones. En el caso de las funciones de dos variables, el estudio de la lógica aymará se encuentra en una etapa menos avanzada, pero el autor identifica gran cantidad de funciones.

Si tomamos como válidos los resultados obtenidos en la lógica aymará, se pueden identifican tres grupos de funciones de una variable: las funciones de *afirmación*, las funciones de *cuestionamiento* y las funciones de *conjetura*. Las funciones de afirmación encontradas son seis e incluyen la afirmación idéntica y las dos funciones modales de Lukasiewicz. Las funciones de cuestionamiento son cinco e incluyen a la negación. Las funciones de conjetura también son cinco y no incluyen a ninguna función definida por Lukasiewicz. En resumen, en la lógica aymará se pueden identificar a 14 de las 27 funciones posibles como funciones de interés lógico. En los hechos son funciones sin correspondientes en la lógica binaria.

Al estudiar las funciones de la lógica aymará aparece una caracterización general de las funciones de interés lógico. Si examinamos las funciones desde el punto de vista algebraico, encontramos que las funciones de afirmación y de cuestionamiento son *monótonas* (en las seis afirmaciones, solamente una no es una función monótona; en las cinco funciones de cuestionamiento, solamente una no es monótona inversa). Recíprocamente, en $\mathbf{C_3}$=$\mathbf{D_1}$ hay diez funciones monótonas (y otras diez monótonas inversas); tres son funciones triviales con valores constantes. De las siete restantes, se han encontrado cinco en la lengua aymará. Puede afirmase entonces que, en la lengua aymará, la agrupación de funciones lógicas corresponde estrechamente con su carácter de monotonía. En [19] se insiste que la lógica aymará posee estructura de *anillo* y no se le da importancia al carácter de reticulado. Por el contrario, en este trabajo se insiste en el carácter de reticulado y se identifica el orden parcial como la propiedad esencial de la dialéctica.

Las dos funciones de Lukasiewicz también son monótonas y esto refuerza la interpretación. De acuerdo con lo expresado se pueden caracterizar las principales funciones dialécticas:

Definición 16.1: Las funciones de una variable, monótonas, se llaman funciones de *afirmación* o simplemente *afirmaciones*; las monótonas inversas, funciones de *negación* (atención, no confundir con las negaciones de una lógica) o de *cuestionamiento*.

Teorema 16.1: Las siguientes propiedades son válidas:

- La función dual de una afirmación es una afirmación.
- La función dual de una función de cuestionamiento es otra.
- La negación de una afirmación es una de cuestionamiento
- El antónimo de una afirmación es una de cuestionamiento.
- Existe el mismo número de funciones de cada tipo.
- La afirmación de una afirmación es otra afirmación.
- El cuestionamiento de una afirmación es un cuestionamiento.
- El cuestionamiento de un cuestionamiento es una afirmación.

Demostración 16.1: Es inmediata a partir de las propiedades de monotonía.

En la lógica binaria no existe nada semejante a esta multiplicidad de afirmaciones o de cuestionamientos. Corresponde detenerse en este aspecto. Comencemos por las funciones de cuestionamiento y su vinculación con las negaciones de la dialéctica. Es claro que cada negación puede ser interpretada como una función de cuestionamiento, pero la inversa no es cierta: una negación, además de invertir el orden del reticulado, *posee inversa*.

La lógica binaria nos ofrece solamente ejemplos triviales de funciones de afirmación o de cuestionamiento. Sabemos, en cambio, que la realidad es mucho más rica y se pueden encontrar fácilmente algunos ejemplos que lo muestran así. Consideremos el caso hegeliano y las siguientes afirmaciones definidas por sus tablas de verdad [14]:

x	***s***(*x*)	***a***(*x*)	***p***(*x*)
1	*1*	*1*	*1*
t	*0*	*1*	*a*
a	*0*	*1*	*s*
s	*0*	*1*	*t*
0	*0*	*0*	*0*

Las tres funciones son afirmaciones puesto que cumplen la propiedad de monotonía. Las dos primeras funciones toman solamente valores *0* y *1* y admiten una interpretación interesante. La función ***s****(x)* solamente es verdadera si la variable *x es universalmente verdadera*, la función ***a****(x)* es verdadera si *x es una tesis*. Si suponemos que en esta dialéctica otorgamos una interpretación temporal a los valores lógicos es inmediato que estas funciones quieren decir:

s*(x)* = válido en todos los instantes del tiempo
a(*x*) = válido algunas veces en el tiempo

Nos encontramos de esta manera con dos de los “operadores” de la *lógica temporal* y tenemos, por supuesto, la propiedad básica:

N s(*x*) = ***a*(*N*x)**

La tercera función posee la propiedad:
N p(*x*) = ***p*(*N*x)**

---

[14] Todas estas funciones son intrínsecas, las dos primeras son las funciones de Lukasiewicz que aparecen en lo que sigue.

para la negación dialéctica principal. En el contexto de una interpretación temporal, puede verse que $\boldsymbol{p}(x)$ toma el valor que tomara la variable en el próximo cambio dialéctico: si ahora vale "tesis" su valor es "síntesis" y así sucesivamente. También este es un "operador" de la lógica temporal y ésta es una de sus propiedades básicas.

La interpretación de acontecimientos en el tiempo es uno de los casos más importantes de uso de la dialéctica (pero no el único). Hemos visto como es necesario, en este contexto, disponer al menos de tres modalidades de afirmación: válido siempre, válido a veces, válido en un tiempo próximo. Con esta misma interpretación temporal se puede dar un significado casi coincidente, pero más expresivo en un contexto materialista dialéctico. Es claro que la función x también es una afirmación. Con esta observación, cabe esta otra terminología posible:

$x = x$ es *tácticamente* válido
$\boldsymbol{p}(x) = x$ es *estratégicamente* válido

En efecto, si x es universalmente falso o universalmente válido, otro tanto ocurre con sus afirmaciones tácticas o estratégicas. Son solamente aquellos valores dialécticos los que aceptan una diferenciación entre táctico o estratégico. En el caso de la primera función se puede considerar que toma el valor que momentáneamente posee en tanto que, por oposición, la segunda toma la negación del valor que posee. Esto puede ser interpretado que la primera toma su valor de "corto plazo" en tanto que la segunda su valor de "mediano plazo", luego de una negación dialéctica.

Hasta ahora los ejemplos han tenido una interpretación temporal, pero no es la única posible como sabemos. Si elegimos un contexto modal surgen otras afirmaciones interesantes. Comencemos por las clásicas de Lukasiewicz. En la lógica modal estas funciones poseen las tablas de verdad:

x	$\boldsymbol{G}(x)$	$\boldsymbol{M}(x)$
1	1	1
t	0	1
0	0	0

Se designa como ***G*** –Gewissheit– a la función que expresa "certidumbre" y con ***M*** –Möglichkeit– a la función que expresa "posibilidad" [15]. Como podemos apreciar, estas dos funciones coinciden, respectivamente, con ***s****(x)* y ***a****(x)* pero en un contexto lógico más sencillo. No se trata ahora de una interpretación temporal sino de una interpretación modal: una función expresa la certeza absoluta, la otra solamente una posibilidad. Cambiado el contexto, cambia el significado y el uso de las funciones de afirmación.

En la dialéctica aymará se describen algunas funciones adicionales. Entre ellas encontramos las correspondientes a las siguientes tablas de verdad:

x	***v****(x)*	***g****(x)*	***c****(x)*
1	*1*	*1*	*1*
t	*t*	*1*	*1*
0	*t*	*t*	*0*

Según Iván Guzmán corresponden a las siguientes interpretaciones:

v*(x)* = *x* "nomás" (es verosímil que ocurra *x*)
g*(x)* = ocurre *x* pero podría dejar de ocurrir (gerundio potencial)
c*(x)* = es plausible *x* (conjetura, igual a ***M****(x)*)

Como es natural, estas modalidades de la afirmación pueden ser generalizadas de inmediato a la dialéctica hegeliana y dar origen a un grupo de funciones de afirmación con una interpretación similar.

Existe otra situación muy común en el pensamiento cotidiano que corresponde a una afirmación del tipo: "*x* **sin perjuicio que** *y*". Como es inmediato, este enunciado posee dos variables y parece encontrarse fuera del tema en consideración, pero no es estrictamente así. Se trata de encontrar aquí una modalidad de afirmación para *x* que permita el siguiente contexto usual de esta afirmación:

[15] Las funciones de Lukasiewicz se pueden definir en cualquier reticulado dialéctico y la extensión de la definición es inmediata y directa. Son funciones intrínsecas.

- afirmo *x*
- *x* e *y* son, en algún sentido, contrarios
- no niego *y*

Con esta interpretación, surge una tabla de verdad de una nueva afirmación, bien entroncada con los problemas dialécticos:

x	
1	*1*
t	*1*
a	*t*
s	*0*
0	*0*

La función definida es una afirmación, por ser monótona, y posee una propiedad especial: si bien es absolutamente verdadera tanto que *x* sea verdadera como que sea “tesis”, también es verdadera si *x* es “antítesis”, una forma de negación de “tesis”. Esta afirmación es aplicable al contexto mencionado y no tiene ningún tipo de equivalente en la lógica binaria o en la lógica modal. En un ambiente más elaborado (el caso yin–yang o el caso hegeliano) cobra significado. Por esta razón este ejemplo es particularmente interesante.

Hay otras funciones de afirmación de este tipo. Supongamos, para fijar las ideas, que empleamos como base el valor lógico “tesis” y que función vale *1*. En estas condiciones tenemos toda una familia de afirmaciones dialécticas que son monótonas y cumplen con la propiedad de valer *1* para “tesis”. Estas funciones son:

x							
1	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*
t	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*
a	*t*	*t*	*t*	*t*	*0*	*1*	*1*
s	*t*	*t*	*1*	*1*	*t*	*t*	*t*
0	*0*	*t*	*0*	*t*	*0*	*0*	*t*

Es claro que las diferentes afirmaciones poseen un carácter distinto. Para el valor “antítesis” en la quinta afirmación, el valor es “falso”, en las dos siguientes es “verdadero” y para las restantes es “tesis”.

La interpretación de las funciones de cuestionamiento esta obviamente vinculada con la negación de las funciones de afirmación. No será necesario entran en mayores detalles. Pero las funciones de una variable nos reservan algunas sorpresas: las funciones de “conjetura” de la lógica aymará. Estas funciones se presentan como algo diferente de las anteriores, con propiedades formales más difíciles de precisar. Nos referimos a los tres casos que no corresponden realmente a afirmaciones o cuestionamientos. Estos casos tienen las tablas de verdad:

x			
1	*0*	*t*	*t*
t	*1*	*0*	*1*
0	*0*	*t*	*t*

Estas tres modalidades de “conjetura” son llamadas por Iván Guzmán como “contingencia cierta”, “incontingencia” y “contingencia” respectivamente. En los tres casos se trata de una función “simétrica” respecto al valor modal. Se cumple la propiedad formal de coincidir con su antónimo:

$$\boldsymbol{f}(\mathbf{N}x) = \boldsymbol{f}(x)$$

Estas funciones son ciertamente difíciles de expresar en una lengua moderna que carece de refinamientos dialécticos. La primera función expresa que “lo único seguro es que no es seguro”. Esta idea se encuentra en enunciados formulados en occidente tales como: “la regla de oro es que no existe regla de oro” o “la excepción confirma la regla”. Expresan, en definitiva, el carácter cambiante, modal o temporal de una afirmación.

Las dos restantes funciones son contrarias entre sí y expresan una noción de contingencia diferente. La segunda función establece que “no hay duda que no hay duda” y bajo esta presentación es aceptable para el pensamiento cotidiano. La tercera función, que es su negación formal, puede enunciarse, por lo tanto, “hay duda que no hay duda”.

Las funciones presentadas se pueden generalizar de inmediato a reticulados dialécticos más complejos. En particular, en el caso hegeliano se tiene como algunas funciones de conjetura las siguientes:

x			
1	*0*	*t*	*a*
t	*1*	*0*	*1*
a	*1*	*0*	*1*
s	*1*	*0*	*1*
0	*0*	*t*	*a*

que resultan de una generalización obvia de las funciones de la lógica aymará.

Una consideración final sobre las funciones dialécticas de una variable. El análisis de los casos nos llevó desde funciones relativamente simples de interpretar –las afirmaciones y sus diversas modalidades– hasta funciones complejas como las funciones de contingencia. Es sumamente significativo que haya sido necesario, para introducirnos en estos temas, entrar cada vez más en un territorio que los lógicos suelen considerar vedado: la referencia propia. Al igual que en el análisis de las paradojas, también el análisis de las funciones de una variable nos lleva a que un enunciado *funcional* o *predicativo* para la lógica clásica, sea un enunciado dialéctico. Los últimos ejemplos han sido muy claros a este respecto. La conclusión a que apuntan estos hechos es que la imposibilidad de analizar las paradojas y las referencias mutuas no proviene de una incapacidad lógica sino de la sobre simplificación que introduce la lógica binaria. Ni el pensamiento espontaneo, ni la dialéctica deductiva, ni la dialéctica declarativa tienen dificultades para manejar estos problemas.

1.18 Conjunciones y disyunciones

En la lógica tradicional existe una única función conjunción y una única función disyunción. En las lógicas dialécticas, puesto que son formuladas en un reticulado, es claro que poseen estas funciones como operaciones básicas. Pero el planteo que nos interesa se encuentra en el pensamiento natural y no en las formalizaciones algebraicas.

En el pensamiento natural no existe esta unicidad de funciones, no ocurre así. Existe una multiplicidad de ideas de conjunción y de disyunción que son empleadas en el conocimiento del universo. La prueba más directa de esto se encuentra en el empleo de funciones no simétricas. Si bien es usual considerar conjunciones o disyunciones simétricas, también existe evidencia de casos asimétricos. Es frecuente encontrar en la poesía, en la literatura o en la oratoria la deliberada intención de una asimetría. La lógica binaria no tiene respuesta para este problema.

El ejemplo ya considerado: "x **sin perjuicio que** y" muestra que se trata de una función conjunción que no es simétrica, por más que se afirme tanto x como y no se dice lo mismo de cada uno. En inglés la disyunción no posee una expresión simétrica (either / or). El uso de "pero" como reemplazo de la conjunción no es casual y también evidencia una asimetría de la función. En la sección siguiente regresaremos sobre este problema particular.

Otra evidencia muy clara de la necesidad de conceptos más amplios de conjunción y disyunción se encuentra en la multiplicidad de mecanismos que poseen las lenguas naturales y que se emplean para expresar estas funciones lógicas. En aymará [19] se identifican explícitamente tres conjunciones y dos disyunciones además de las operaciones lógicas básicas del reticulado.

La caracterización algebraica de las funciones de la dialéctica aymará nos lleva nuevamente a funciones monótonas. Si generalizamos las funciones encontradas en la lógica aymará tendremos las siguientes definiciones:

Definición 17.1: Se llama función *conjunción* a toda función, monótona, de dos variables, expresada mediante el símbolo Ä, que cumple con:

$$x \text{ Ä } y \leq x \,.\, y$$

Definición 17.2: Se llama función *disyunción* a toda función, monótona, de dos variables, expresada mediante el símbolo Å, que cumple con:

$$x \text{ Å } y \geq x + y$$

De acuerdo con estas definiciones, las operaciones básicas del reticulado aparecen como casos limites de una familia más amplia de funciones lógicas que expresan las propiedades de conjunción y disyunción formal. Dentro de esta familia existen, como es inmediato, funciones que no son simétricas. Es muy fácil, por otra parte, toda vez que se tiene una operación no simétrica, fabricar una simétrica mediante la suma o el producto lógico. Así por ejemplo, si "Å" una disyunción, la operación definida como:

$$(x \text{Å} y) + (y \text{Å} x)$$

es una disyunción simétrica o conmutativa. El caso conjunción se actúa en forma dual. Es interesante observar que "+" puede ser reemplazado por cualquier disyunción.

Teorema 17.1: Las siguientes propiedades son válidas:

- La función dual de una conjunción es una disyunción
- La función dual de una disyunción es una conjunción
- El número de funciones conjunción y disyunción coincide
- La disyunción de dos valores contrarios lógicos es 1
- La conjunción de dos valores contrarios lógicos es 0.

Demostración 17.1: La demostración es inmediata a partir de las propiedades de monotonía.

Existen muchos ejemplos importantes de empleo de estas funciones, pero sobre todos los casos interesa uno: el caso argumentativo. Esta situación lógica se puede plantear así: es frecuente argumentar la validez de un enunciado mediante un conjunto de argumentos. Se llega así a una estructura del tipo:

x es válido por el argumento y,
por el argumento z,
por el argumento w,
etc.

Es claro que esta estructura lógica pretende decir algo así como: "cada argumento por separado no es suficiente pero el conjunto permite obtener que x es válido". No cabe duda que es una forma espontanea de la argumentación y tampoco cabe duda que es interesante analizar su contenido lógico.

Desde un punto de vista abstracto, se trata de investigar cual es la función lógica que se reemplaza por la coma en este caso. Es muy frecuente que la coma reemplaza una función lógica compleja, más adelante encontraremos otros ejemplos. La principal propiedad que posee esta función lógica es una cierta forma de monotonía que permite obtener un "refuerzo" de la argumentación, un "mayor grado de verdad". Si recurrimos a la interpretación modal de la dialéctica y pensamos en el caso de dos variables solamente, se trata de buscar una función $\mathbf{f}(x,y)$ que posea la propiedad:

$$\mathbf{f}(x,y) \geq x \;\; ; \;\; \mathbf{f}(x,y) \geq y$$

De esta manera se "refuerza" la argumentación por el agregado de argumentos.

Planteado de esta manera resulta claro que todas las funciones disyunción poseen esta propiedad puesto que:

x Å $y \geq x + y \geq x$; x Å $y \geq x + y \geq y$

La disyunción aparece así como una función de argumentación. Como es natural, existen diversas funciones posibles. En la medida que se eligen funciones disyunción mayores se establece una argumentación más fuerte que la simple suma lógica de los argumentos. Las funciones conjunción, por negación, permiten realizar la argumentación negativa: cada nuevo argumento refuerza la falsedad de la conclusión. La dualidad de unas y otras funciones permite este tratamiento completamente simétrico.

Teorema 17.2: En el reticulado dialéctico simple $\mathbf{D_n}$, el número de funciones conjunción o disyunción esta acotado por:

$$(n+2).2^{3n}$$

Demostración 17.2: Consideremos la conjunción para fijar las ideas, en forma dual es válido para las disyunciones. Sobre dos valores contrarios lógicos la función vale 0. En el caso que uno de los valores es 0, la función vale 0. Esto hace que solamente se deben considerar cuatro tipos de pares de valores. Estos casos son, llamando genéricamente d a un valor dialéctico:

*d * d ; d * 1 ; 1 * d*

que pueden tomar los valores *0* y *d* solamente y el caso

*1 * 1*

que puede tomar cualquiera de los *(n+2)* valores del reticulado. Si no existiera la propiedad de monotonía el resultado sería el indicado por la acotación.

1.19 Las conjunciones adversativas

Todas las lenguas poseen, más allá de sus peculiaridades, elementos que le permiten formular enunciados lógicos. En las lenguas herederas del Latín se encuentran maneras de presentar la función negación así como las cuatro funciones básicas, de dos variables, de la lógica binaria. Estas funciones se expresan mediante conjunciones. En algunos casos los signos de puntuación reemplazan a conjunciones elípticas, este es un recurso literario muy difundido.

Los lingüistas clasifican a las conjunciones según criterios que no siempre coinciden con las funciones lógicas. Llaman conjunciones copulativas a las que corresponden a la función “Y” o a su negación. Llaman distributivas a diferentes conjunciones que corresponden a la función lógica EXOR. Llaman condicionales, concesivas e ilativas a las que agrupan las diferentes formas de la función implicación. Las conjunciones adversativas plantean un desafío lógico formidable.

Es frecuente interpretar las conjunciones adversativas como variantes de la función lógica “Y”. Según esta manera de actuar, una expresión del tipo:

a pero *b*

suele ser interpretada como

a y *b*

con el agregado que “se debe advertir especialmente la presencia de *b*” en el enunciado. Vale la pena destacar que por esta razón existe una cierta asimetría en el papel de los dos elementos, *a* y *b*. En muchos casos esta es la interpretación de las conjunciones adversativas, pero no se agota aquí su empleo. Por esta razón presentaremos algunos ejemplos que ilustren nuevas situaciones.

Un primer ejemplo de uso complejo de la conjunción adversativa se encuentra en el siguiente texto de Freud tomado de “El chiste y su relación con el Inconsciente”:

> Serenísimo recorre sus Estados. Entre la gente que acude a visitarlo, ve un individuo que se le parece extraordinariamente. Le hace acercarse y le pregunta:
>
> –¿Recuerda usted si su madre sirvió en el Palacio alguna vez?
>
> –No, Alteza, responde el interrogado, *pero* sí mi padre.

En este caso la conjunción *pero* cumple una función muy especial. En este fragmento *hay dos interpretaciones posibles para el texto* y esta doble interpretación esta indicada por la conjunción: es posible interpretar que el resultado del parecido sea una casualidad y también es posible interpretar que, contra lo que sugiere el monarca, son parecidos por su padre y no por su madre. Entendemos, y esto se reforzara con otros ejemplos, que aquí la conjunción *pero* expresa una función lógica diferente. Este enunciado, como muchos de los chistes y juegos de palabras, es el equivalente intelectual del cubo de Necker: existe una doble interpretación y no es posible decidir a cual de las dos interpretaciones se hace referencia.

La posibilidad de construir enunciados con doble interpretación es uno de los usos de la conjunción *pero*. Hay otros casos igualmente interesantes. En el siguiente chiste, también de Freud, se la emplea con otra función:

> Federico el Grande oyó hablar de un predicador de Silesia que tenía fama de hallarse en trato con los espíritus. Deseoso de averiguar lo que había en tales rumores, hizo acudir a su presencia al predicador y le recibió con la pregunta siguiente:
>
> –¿Puede usted conjurar a los espíritus?
>
> –Sí, Majestad, *pero* nunca acuden.”

En este ejemplo el resultado también es un chiste, pero de diferente naturaleza lógica. Aquí no aparecen dos interpretaciones sino una contradicción. La respuesta, pasada a términos muy simples dice: “puedo conjurar a los espíritus *pero* no puedo conjurar a los espíritus”. Con este enunciado se llega a la máxima precisión (pero también se destruye el chiste). La conjunción *pero* permite armar *una contradicción que posee valor de chiste*. También posee esa capacidad de armar una doble interpretación como en el primer ejemplo: permite decir al mismo tiempo que se pueden conjurar a los espíritus y que no se tiene éxito alguno.

El tercer ejemplo no es un chiste sino un fragmento del celebre Poema 20 de Neruda:

Ya no la quiero, es cierto, *pero* tal vez la quiero.

Se enuncia aquí una verdadera *paradoja*: dos afirmaciones contrarias unidas por la conjunción *pero*. Si eliminamos todo lo superfluo, este verso dice:

no la quiero *pero* la quiero

Se trata de interpretar el significado desde el punto de vista lógico, porque no cabe ninguna duda que, hasta el momento, a nadie le ha preocupado la *ilógica* de este texto y prácticamente todo el mundo estará de acuerdo que el verso expresa una confusa unión de sentimientos que –sin embargo– resulta fácil de interpretar. Este verso indica que es simultáneamente válido afirmar “la quiero” y “no la quiero”.

Si solamente contáramos con las funciones lógicas binarias nos encontraríamos en un aprieto. La afirmación:

no la quiero *o* la quiero

no presenta ninguna dificultad porque *es universalmente válida* cualquiera sean los sentimientos del autor. Es claro entonces que para expresar la duda, para expresar que coexisten dos sentimientos contrarios seria más ajustado decir:

no la quiero *y* la quiero

pero esta afirmación *es universalmente falsa*. Por esta razón se emplea la conjunción *pero* que permite armar una contradicción material con significado dialéctico. El enunciado paradójico aparece como algo a mitad de camino entre las funciones lógicas “y” y “o” y por esta razón emplea una conjunción diferente. En rigor, *pero*, en esta función esta a igual distancia de ambas, no es cierto –como suelen afirmar los lingüistas– que *pero* es un “y” modificado, es una función lógica nueva.

Un último ejemplo nos ilustrara aun más sobre esta función lógica nueva que expresa la conjunción *pero*. Es ahora un conocido soneto de Lope de Vega que intenta definir al amor –y que a nadie ha sorprendido por *ilógico*– mediante un texto admirable por su sencillez:

Desmayarse, atreverse, estar furioso,
áspero, tierno, liberal, esquivo,
alentado, mortal, difunto, vivo,
leal, traidor, cobarde y animoso;
(...)
esto es amor, quien lo probó lo sabe.

La singular definición que elabora Lope esta formada por una larga lista de elementos *separados por comas*. El autor emplea comas porque no es sencillo escribir la conjunción –o las conjunciones– que liga todo este conjunto. Solamente en un punto del soneto Lope escribe la conjunción “y”. Esta misma técnica ya había sido empleada por Petrarca, en sus sonetos a Laura, para una empresa similar:

(...)
temo y tengo esperanzas; ardo y soy de hielo;
vuelo al cielo y yazgo en tierra;
nada estrecho y a todos abrazo.
(...)

Los signos de puntuación arman parejas de contrarios muy claros. La intención de los dos autores es elaborar una lista de contradicciones que caracteriza la pasión amorosa. De hecho se emplea en forma reiterada la técnica de las paradojas y se recurre a la coma –o a la conjunción “y”– para expresar la manera como se arman estas contradicciones. Es interesante observar que, excepto por una cierta posible asimetría, los enunciados de Lope se podrían escribir – si nos olvidamos del número de sílabas del soneto– como:

desmayarse *pero* atreverse
leal *pero* traidor
cobarde *pero* animoso

y así los demás. Con esto pretendemos mostrar que existe una clara vinculación entre el uso de la conjunción *pero* y la conjunción elíptica que se ha reemplazado por una coma. Sin embargo no pretendemos encontrar, por el momento, la conjunción o la función lógica que esta reemplazada por *las comas que ligan las contradicciones*. Este problema será aclarado más adelante. Por el momento solamente podemos aceptar que esta función lógica plausiblemente es una operación asociativa y conmutativa, tal como exige la interpretación de la definición que intenta hacer el soneto.

1.20 La penetración dialéctica

Las ideas de la sección anterior se reflejan en la dialéctica en forma directa sobre las funciones de dos variables. Ya sabemos que es posible definir dos familias de funciones que corresponden a dos ideas lógicas básicas: la conjunción, la disyunción. Estas ideas son, en su fondo, generalizaciones de las funciones lógicas clásicas. La noción dialéctica nueva es la asociada a las conjunciones adversativas. Esta función es designada como *penetración dialéctica* y no ha sido empleada en los estudios de lógicas multivaluadas.

La penetración corresponde se expresa mediante las conjunciones adversativas en las lenguas herederas del latín. Como función lógica no posee significativo equivalente en la lógica binaria. Se define en forma muy simple:

Definición 19.1: Se llama función *penetración* a toda función, monótona, de dos variables, expresada mediante el símbolo *****, que cumple con:

$$x \,.\, y \leq x * y \leq x + y$$

Se llama *penetración regular* a toda función penetración que además es asociativa y conmutativa [16].

Esta definición complementa las Definiciones 17.1 y 17.2 y establece que la penetración se encuentra “a mitad de camino” entre las conjunciones y las disyunciones. Los tres tipos de funciones se designan colectivamente como *funciones composición* y se expresan mediante un único símbolo “*” en los casos en que no exista confusión. En los casos en que interesa la diferenciación, se emplearan los símbolos especializados “⊗“ o “Å“.

A partir de una función penetración que no es simétrica se pueden construir funciones penetración simétricas. Sea “*” una penetración y consideremos las funciones definidas por:

$$(x * y) + (y * x)$$
$$(x * y) . (y * x)$$

son simétricas y diferentes, de otro modo “*” sería simétrica. Es inmediato que son dos funciones penetración. Es interesante observar que tanto “+” como “.” pueden ser reemplazadas por cualquier penetración. Además son inmediatos los teoremas que siguen.

Teorema 19.2: Las siguientes propiedades son válidas:

- La función dual de una penetración es una penetración.
- Toda función penetración es idempotente.
- La función “.” es, al mismo tiempo, una conjunción y una penetración.
- La función “+” es, al mismo tiempo, una disyunción y una penetración.

Demostración 19.2: Estas propiedades son inmediatas.

Teorema 19.3: En el reticulado dialéctico simple $\mathbf{D_n}$, el número de funciones penetración esta acotado por:

$$(n+2)^{(n(n-1)+2)} . 2^{4.n2}$$

Demostración 19.3: Los únicos valores determinados de una función

[16] Y se debiera agregar también, *intrínseca*.

penetración son los dados por la propiedad de idempotencia. En los demás casos hay tres situaciones:

$$d * d \quad \text{o} \quad 0 * d$$

donde solamente se pueden tomar los valores 0 y d; los casos:

$$d * 1 \quad \text{o} \quad 1 * d$$

donde solamente se pueden tomar los valores d y 1 y los casos de penetración de contrarios lógicos, que son:

$$d * d' \quad \text{o} \quad 0 * 1 \quad \text{o} \quad 1 * 0$$

donde se puede tomar cualquiera de los $(n+2)$ valores. Este resultado completa el teorema puesto que las funciones penetración son, además, monótonas.

En el caso $\mathbf{D_0} = \mathbf{B}$ existen cuatro funciones penetración, dos de las cuales son la suma y el producto lógico y las dos restantes son triviales y coinciden con cada una de las variables. Por esta razón la lógica binaria no ha podido introducir estos conceptos. En el caso hegeliano, con n=3 se tienen 2.560 funciones conjunción y otras tantas funciones disyunción, entre las cuales se encuentran las operaciones de producto y suma y las funciones constantes. En cambio, se tienen $5^8 \times 2^{36}$ funciones penetración y este número es del orden de 10^{16}.

Teorema 19.4: La condición necesaria y suficiente para que una operación idempotente y conmutativa, definida en un reticulado dialéctico simple $\mathbf{D_n}$, sea una penetración es que si d y d' son valores dialécticos, se cumpla:

$$d * 0 \leq d * d' \leq d * 1$$
$$d * 0 \leq 0 * 1 \leq d * 1$$

Demostración 19.4: Las condiciones son necesarias por la monotonía de la función penetración. Para demostrar que son suficientes es necesario demostrar que una operación, idempotente y conmutativa, que cumple estas relaciones es monótona y cumple con las condiciones de acotación de las penetraciones. Para demostrar la monotonía consideremos dos valores que cumplan con una desigualdad estricta (si fueran iguales la propiedad de monotonía es inmediata). Existen solamente tres casos posibles en estas condiciones en un reticulado dialéctico simple:

$0 < d$; $d < 1$; $0 < 1$

Apliquemos la operación a un tercer valor, lo cual exige considerar los casos: 0, d, d' (otro valor dialéctico diferente) y 1. Tendremos que analizar entonces los siguientes casos:

$0 * 0 \leq 0 * d$ cierto por la idempotencia de la operación
$0 * d \leq 0 * 1$ cierto por hipótesis
$0 * 0 \leq 0 * 1$ cierto por la idempotencia de la operación
$d * 0 \leq d * d'$ cierto por hipótesis
$d * d' \leq d * 1$ cierto por hipótesis
$d * 0 \leq d * 1$ cierto por hipótesis
$1 * 0 \leq 1 * d$ cierto por hipótesis
$1 * d \leq 1 * 1$ cierto por la idempotencia de la operación
$1 * 0 \leq 1 * 1$ cierto por la idempotencia de la operación

Luego la monotonía se cumple en todos los casos. Falta demostrar ahora que se cumplen las desigualdades de definición de la penetración. Los casos que no hay que considerar son los de idempotencia o cuando se aplican a elementos contrarios, en los cuales la acotación es trivial. En resumen, los casos a verificar son:

$0 . d \leq 0 * d$ cierto en forma trivial
$0 * d \leq 0 + d$ cierto por hipótesis, para el caso $d = d'$
$d . 1 \leq d * 1$ cierto por hipótesis, para el caso $d = d'$
$d * 1 \leq d + 1$ cierto en forma trivial

De esta manera queda demostrado el teorema.

Teorema 19.5: Toda penetración regular, en un reticulado dialéctico simple, es una operación suma en uno de los semi–reticulados de la Figura 8.

Demostración 19.5: La primera parte de la demostración se encuentra en Birkhoff [9]: como una penetración es una operación idempotente, conmutativa y asociativa es una suma en un semi–recticulado. Ahora solamente es necesario caracterizar los reticulados en los cuales la suma es una penetración regular. Para esto se aplican las condiciones del Teorema 19.4. Supongamos que existe un elemento dialéctico d que en el orden parcial del semi–recticulado es el supremo. Como consecuencia será mayor que 0 y que 1 y se debe cumplir:

$$d * 0 = d \;\; ; \;\; d * 1 = d$$

Como consecuencia del Teorema 19.4 resulta entonces:

$$0 * 1 = d$$

No puede existir otro elemento d' que supere a 0 y 1 porque, aplicando el mismo razonamiento, sería:

$$d' = 0 * 1 = d$$

Luego, solamente puede existir un elemento dialéctico que supere a 0 y 1. Luego es necesario que posea la forma del caso $\mathbf{S_1}$ de la Figura 8. La suma en el reticulado $\mathbf{S_1}$ es una penetración regular porque para todo valor dialéctico t diferente de d se tiene:

$$0 * t = 0 \quad ; 1 * t = 1$$

y las dos condiciones no imponen ninguna restricción. Para el valor dialéctico d las condiciones son triviales porque es el supremo del semi–recticulado. Examinemos ahora el caso en que el supremo del semi–recticulado sea 1, el caso 0 se analiza en forma dual. En esta situación, las condiciones del Teorema 19.4 se convierten en:

$$0 * d \leq d * d'$$

puesto que al ser 1 el supremo del reticulado, no impone sino condiciones triviales de acotación. Pueden ocurrir que existan valores dialécticos d_1, d_2, ... d_p que sean superiores a 0, tal como muestra la Figura 8. Para dos de estos valores la condición se convierte en:

$$d_i = 0 * d_i \leq d_i * d_j$$

luego debe ocurrir que para toda pareja de valores, su composición sea superior a cada uno de ellos y de allí la forma del semi–recticulado $\mathbf{S_2}$ de la Figura 8. Recíprocamente, la suma en este semi–recticulado conduce a una penetración regular porque todo se reduce a verificar la acotación indicada. Para dos valores superiores a 0 la propiedad se cumple en forma directa. Si d es inferior a 0 no se impone ninguna condición porque $0 * d = 0$. El único caso que queda por verificar es cuando d es superior a 0, en este caso se tiene que las dos composiciones son iguales a este valor y también se cumple. Con esto quedan demostrados todos los casos.

Teorema 19.6: Para toda composición monótona, asociativa y conmutativa, la ecuación de definición se puede extender al número de valores que se desee.

Demostración 19.6: Consideremos el caso de una conjunción representada por “⊗“, los demás casos se demuestran igual. El caso general es consecuencia del caso de tres valores y de la aplicación de la propiedad asociativa. Nos queda por demostrar la ecuación de definición para tres valores a, b y c. Por definición se tiene:

$$a \otimes b \leq a \,.\, b$$

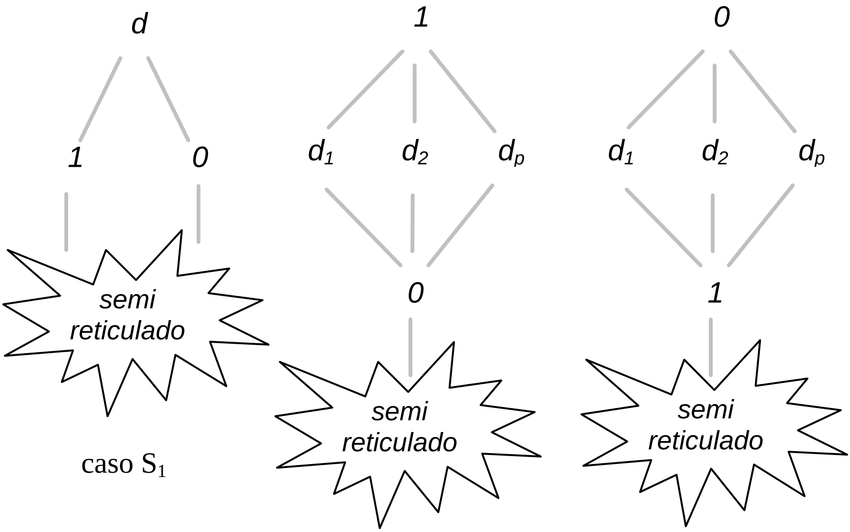
Si aplicamos a ambos miembros la operación “⊗“ con la variable c, teniendo en cuenta la monotonía, se llega a:

$$(a \otimes b) \otimes c \leq (a \,.\, b) \otimes c \leq (a \,.\, b) \,.\, c$$

y por la propiedad asociativa se llega finalmente al resultado para tres valores:

$$a \otimes b \otimes c \leq a \,.\, b \,.\, c$$

con lo cual queda demostrado el teorema.



caso S_1 caso S_2 caso S_3

Figura 8: Semi–recticulados que permiten obtener todas las penetraciones regulares (en un reticulado dialéctico simple) como sumas lógicas. Con d se designa un valor dialéctico y con *semi–recticulado* se indica una estructura arbitraria de los valores dialécticos.

1.21 Casos especiales de penetración dialéctica

Existe un caso particular de penetración que interesa considerar, se trata de las funciones penetración que poseen la propiedad adicional:

Definición 20.1: Se llama *penetración afirmativa* a toda penetración regular que cumple con la propiedad:

$x * y$ es tesis si y solamente si x e y son tesis

En todo reticulado dialéctico simple existen penetraciones afirmativas, tal como muestra el siguiente teorema:

Teorema 20.1: La totalidad de las penetraciones afirmativas se obtienen de los semi–recticulados de la Figura 9 (para el caso hegeliano) y de los que se obtienen permutando sus elementos dialécticos.

Demostración 20.1: La definición de penetración afirmativa puede ser reemplazada por:

$x * y = 0$ si y solamente si x o y es 0

Con esta presentación resulta que la penetración afirmativa proviene del caso $\mathbf{S_3}$ de la Figura 8, de modo que la composición con 0 siempre de como resultado 0. Pero como también debe ocurrir que la composición sea 0 solamente si uno de los elementos es 0, el semi–recticulado no puede tener más que un elemento contiguo a 0: si existieran dos o más elementos contiguos a 0 su composición daría 0. Resulta así demostrado el teorema. Los casos posibles en $\mathbf{D_3}$ se encuentran en la Figura 9.

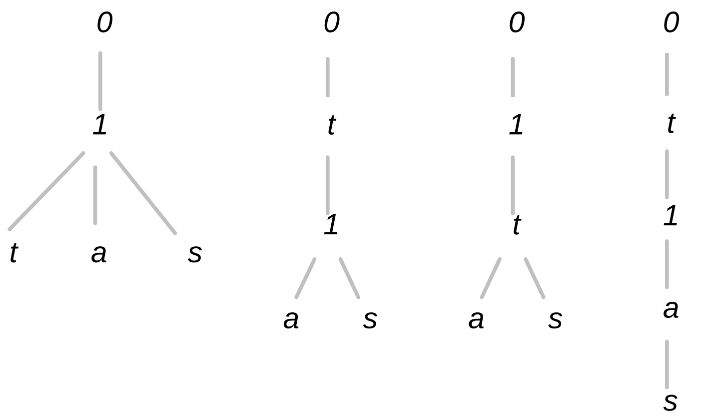


Figura 9: Semi–recticulados cuyas sumas definen las penetraciones afirmativas en $\mathbf{D_3}$. Es necesario considerar también todas las permutaciones de los valores dialécticos entre sí y con *1* [17].

Las funciones duales de las penetraciones afirmativas poseen la pro-

[17] Solamente el primero de los semi–reticulados conduce a una función intrínseca.

piedad de valer 1 si uno de los argumentos vale 1. Existe un caso particular de penetración afirmativa que posee interés. El siguiente Teorema da cuenta de este hecho:

Teorema 20.2: En todo reticulado existe una única penetración afirmativa, denominada *penetración argumentativa*, que posee la propiedad:

$$x * y \geq x \quad ; \quad x * y \geq y$$

siempre que x e y sean diferentes de 0.

Demostración 20.2: Consideremos la penetración definida por las ecuaciones:

si x, y no son 0 entonces: $x * y = x + y$
en los demás casos: $0 * x = x * 0 = 0$

es una penetración porque es una suma en el semi–recticulado formado por el reticulado original al cual se le quita el elemento 0 y se lo coloca como supremo, como recubrimiento del elemento 1. Es monótona en cada una de sus variables como es inmediato y cumple la condición de acotación exigida. Es la única penetración argumentativa que existe en el reticulado puesto que si se tiene:

$$x * y \geq x$$
$$x * y \geq y$$

sigue:

$$x * y \geq x + y$$

Pero, por ser una penetración se tiene:

$$x * y \leq x + y$$

y de allí que, para argumentos diferentes de 0, coincida con la suma lógica del reticulado.

La penetración argumentativa es la menor de las funciones argumentativas en un reticulado. Ya se sabe, por otra parte, que existen otras funciones argumentativas y son las disyunciones. La penetración argumentativa posee una propiedad muy interesante:

Teorema 20.3: En una reticulado dialéctico simple no existe ninguna función penetración que sea mayor que la penetración argumentativa.

Demostración 20.3: En efecto, supongamos que designamos con * a una penetración que es mayor o igual que la penetración argumentativa para todas las parejas de valores de un reticulado dialéctico simple. Si x e y son ambos diferentes de 0, el valor de la penetración debe ser igual a la suma lógica porque, por ser una penetración, $x * y$ no puede ser superior a $x + y$, pero por ser mayor que la penetración argumentativa debe ser mayor o igual a $x + y$. Luego, debe ocurrir que exista un elemento del reticulado tal que:

$$0 * u > 0$$

Si u fuera el valor dialéctico t, entonces debe ocurrir que $0 * t$ sea mayor estricto que 0, luego, por ser una penetración debe ocurrir:

$$0 * \mathrm{t} = t$$

Sea x otro valor dialéctico diferente de t, se tiene:

$$t * x = 0 * t * x = 0 * 1$$

Pero, por otra parte, $t * x$ debe ser mayor que la penetración argumentativa y esta vale 1, luego se tiene $0 * 1 = 1$. Por otra parte si ocurriera que $0 * x = 0$ se tendría:

$$1 = 0 * t * x = (0 * x) * t = 0 * t = t$$

lo cual es contradictorio. Luego debe ocurrir $0 * d = d$ y de allí resulta que la penetración coincide con la suma lógica. Puede ocurrir, sin embargo, que $u = 1$. En este caso $0 * 1$ puede ser un valor dialéctico o el valor 1. Supongamos que $0 * 1 = t$ entonces se tiene:

$$1 * t = 1 * 1 * 0 = 1 * 0 = t$$

pero entonces esta penetración no es mayor que la penetración argumentativa. Si fuera $0 * 1 = 1$ entonces debe ocurrir que para cualquier valor dialéctico x se tiene:

$$0 * x = 0$$

de otro modo se cae en un caso ya analizado. Pero en esta situación para dos valores dialécticos cualquiera se tiene:

$$1 = 0 * 1 = 0 * (u * v) = (0 * u) * v = 0 * v = 0$$

Llegamos entonces que ninguna alternativa es posible, luego la penetración argumentativa no puede ser inferior a otra penetración tal como se debía demostrar.

Por extensiones naturales se pueden considerar las funciones *afirmativas duales* y las *argumentativas duales*. Las propiedades se obtienen en forma dual.

Otro conjunto de penetraciones con propiedades muy importantes lo constituye el caso autodual:

Definición 20.2: Una penetración regular se dice *autodual* si existen dos negaciones $\mathbf{N_1}$ y $\mathbf{N_2}$ tales que:

$$\mathbf{N_1}(x * y) = \mathbf{N_2}\, x * \mathbf{N_2}\, y$$

Las penetraciones autoduales merecen una consideración con algún detalle. Demostraremos sobre algunos teoremas de utilidad para el desarrollo de las ideas de la dialéctica.

Teorema 20.4: Las penetraciones autoduales en un reticulado dialéctico simple se obtienen del caso S1 de la Figura 8.

Demostración 20.4: En efecto, si se trata de una penetración autodual debe existir simetría de los valores 0 y 1 y esto conduce obligatoriamente al caso $\mathbf{S_1}$. Recíprocamente, si se trata de un caso $\mathbf{S_1}$ es claro que se pueden encontrar dos negaciones en las condiciones de la Definición 20.2 con lo cual se completa la demostración.

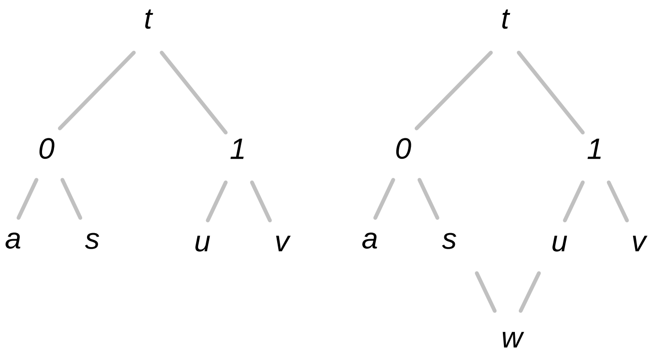


Figura 10: Semi–recticulados cuyas sumas definen penetraciones autoduales en $\mathbf{D_5}$ y $\mathbf{D_6}$ tales que la composición de valores dialécticos no da un valor dialéctico.

Teorema 20.5: Si un reticulado posee una penetración autodual también posee un elemento central.

Demostración 20.5: Sea, en efecto, el elemento definido:

$$a = 0 * 1$$

Resulta de inmediato, puesto que se trata de una penetración autodual:

$$\mathbf{N_1}\, a = \mathbf{N_2}\, 0 * \mathbf{N_2}\, 1 = 0 * 1 = a$$

Luego se puede encontrar al menos un elemento que coincide con su negación, tal como era necesario demostrar.

El teorema 20.5 garantiza que en los reticulados dialécticos compuestos, de rango par, *no existe ninguna penetración autodual*. Este resultado posee una gran importancia para las propiedades de las diferentes dialécticas por el papel especial que juegan las penetraciones autoduales dentro de la teoría.

Un problema importante para las penetraciones autoduales lo constituye la composición de valores dialécticos. El caso $\mathbf{S_1}$ de la Figura 8 no garantiza automáticamente que la composición de valores dialécticos de un resultado dialéctico. En efecto, en la Figura 10 se presenta un contra ejemplo correspondiente al reticulado dialéctico simple $\mathbf{D_5}$, el más simple donde puede ocurrir una penetración autodual en la cual la composición de valores dialécticos no da un valor dialéctico. También se presenta un contra–ejemplo para el caso $\mathbf{D_6}$.

En los contra ejemplos resulta claro que ocurre:

$$a * s = 0$$

en tanto que, aplicando las negaciones $\boldsymbol{N} = \boldsymbol{N_1} = \boldsymbol{N_2} = (01)(av)(su)$, se demuestra que la penetración es autodual en ambos casos. Por estas razones se realiza la siguiente definición:

Definición 20.3: Una penetración en un reticulado se llama *penetración principal* si cumple que es autodual y que la composición de valores dialécticos da un resultado dialéctico.

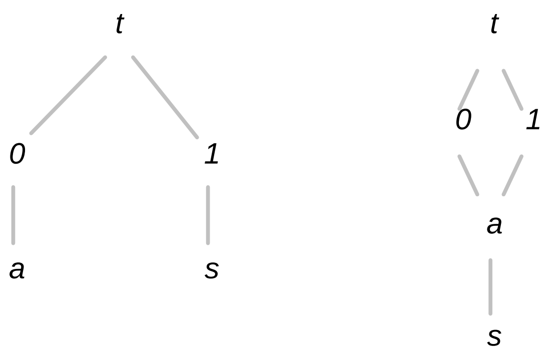


Figura 11: Semi–recticulados cuyas sumas generan las penetraciones principales en el reticulado hegeliano, a menos de un automorfismo que realice la permutación de los tres valores dialécticos. Las negaciones, respectivamente, son $(01)(as)$ y (01) para la propiedad autodual.

Teorema 20.6: En todo reticulado dialéctico simple de orden mayor que 5, existen penetraciones que no son principales.

Demostración 20.6: Los contra ejemplos de la Figura 10 pueden construirse en los reticulados dialécticos simples de orden mayor que 5 por extensión de estas geometrías. Con esto se completa el teorema.

Teorema 20.7: En toda penetración principal de un reticulado dialéctico simple, la composición de dos valores contrarios es un valor dialéctico.

Demostración 20.7: En efecto, si se trata de un valor dialéctico a, su contrario (bajo cualquier negación) es otro valor dialéctico y la composición, por definición, es un valor dialéctico. Si se trata de 0 o de 1, se aplica el Teorema 20.5 y se completa la demostración.

A efectos de reunir los resultados generales para el caso hegeliano, se presenta en la Figura 11 los semi–recticulados que corresponden (a menos de un automorfismo) con las penetraciones principales. Este resultado será importante en la quinta parte de este trabajo. Como resulta de esta figura hay dos penetraciones básicamente diferentes que cada una genera seis casos concretos: en total doce penetraciones diferentes.

1.22 La clasificación de las funciones lógicas

Los ejemplos presentados justifican una preocupación por clasificar las funciones lógicas empleadas en la dialéctica. Es a través del grupo de Piaget que aparece la estructura de estas funciones. Este grupo se nos presenta como la herramienta unificadora de las diversas nociones dialéctica. En su fondo, el grupo de Piaget define lo que podemos llamar "propiedades intrínsecas" de la dialéctica porque se vincula con las propiedades de base que no alteran el orden en un reticulado.

Comencemos por situarnos en el ambiente natural de trabajo, *en el reticulado de las funciones monótonas*. La aplicación del grupo de Piaget a este reticulado –o, mejor dicho, a casos particulares de este reticulado– permitirá clasificar y comprender las propiedades generales de las funciones empleadas en la dialéctica.

El primer tema de interés se vincula con las funciones de afirmación. Como se desprende de inmediato, todas las propiedades se puede extender, por negación, a las funciones de cuestionamiento.

Definición 21.1: Una función de afirmación $f(x)$ se dice *autodual* si existen dos negaciones N_1 y N_2 tales que

$$f(x) = N_1\, f(N_2\, x)$$

De esta definición es inmediato, por el teorema 5.8, que la función $f(x)$ es un *valor central* del reticulado de las funciones monótonas de una variable. Por esta razón se la llama autodual. Estas funciones no solamente corresponden a los valores centrales sino que permiten separar las funciones de afirmación en subconjuntos disjuntos.

Teorema 21.1: En todo reticulado existen funciones de afirmación que son autoduales.

Demostración 21.1: Es inmediato que la función $f(x) = x$ es una función de afirmación, en cualquier reticulado. También en inmediato que se trata de una función autodual. Luego existe al menos una función. Por otra parte, si A es un automorfismo del reticulado, toda función $f(x) = Ax$ es una función afirmación autodual. Además de esto, si c es un valor central del reticulado, la función $f(x) = c$ también es una función autodual.

El Teorema 21.1 establece una propiedad interesante de los reticulados de las funciones monótonas de una variable: siempre existen elementos centrales. A pesar que se han construido varios ejemplos, estos ejemplos no agotan el tema. Así por ejemplo, en el reticulado hegeliano la función:

x	
1	*1*
t	*0*
a	*t*
s	*1*
0	*0*

es una función autodual pero no pertenece a ninguna de las categorías mencionadas en la demostración del teorema.

Teorema 21.2: Dada una función de afirmación $f(x)$ definida sobre un reticulado dialéctico simple, entonces ocurre una de las siguientes posibilidades:

- es una función autodual
- existe una función autodual que es menor
- toda función dual posee una función autodual que es menor

Demostración 21.2: Consideremos los valores $\boldsymbol{f}(1)$ y $\boldsymbol{f}(0)$. Si ambos valores son dialécticos, entonces, por monotonía, la función $\boldsymbol{f}(x)$ es constante y vale este valor dialéctico. Luego coincide con una función autodual y está demostrado el teorema.

Si ambos valores no son dialécticos, podemos siempre suponer que $\boldsymbol{f}(1) = 1$, si no fuera así, tomaríamos una cualquiera de las funciones duales en lugar de $\boldsymbol{f}(x)$. Se plantean entonces dos situaciones según el carácter de $\boldsymbol{f}(0)$: que este valor sea dialéctico o que sea 0.

Si $\boldsymbol{f}(1) = d$, entonces por monotonía, $\boldsymbol{f}(x) \geq d$. Sea la función $\boldsymbol{a}(x)$ que vale:

$$\boldsymbol{a}(1) = 1$$
$$\boldsymbol{a}(x) = d \quad \text{para todo } x \text{ dialéctico}$$
$$\boldsymbol{a}(0) = 0$$

Esta función es autodual y cumple con la condición

$$\boldsymbol{a}(x) \leq \boldsymbol{f}(x)$$

con lo cual queda demostrado el teorema. Si $\boldsymbol{f}(0) = 0$ debemos considerar la cantidad de veces que $\boldsymbol{f}(x)$ toma el valor 1 y la cantidad de veces que toma el valor 0. Si el primer número es inferior, debemos considerar la función dual. A efectos de fijar las ideas, consideremos un ejemplo hegeliano para continuar con la demostración. El argumento es de carácter general.

Supongamos la situación:

x	***f***(*x*)	***g***(*x*)	***a***(*x*)
1	*1*	*1*	*1*
t	*0*	*1*	*1*
a	*t*	*t*	*0*
s	*t*	*t*	*t*
0	*0*	*0*	*0*

En este ejemplo, el número de veces que ocurre el valor *1* es menor que el número de veces que ocurre el valor *0*, luego consideramos la función ***g****(x)* dual de ***f****(x)* bajo la negación *(01)*. Construiremos ahora una función ***a****(x)* que sea autodual y menor que ***g****(x)*. Para esto se conserva el valor que toma en *1* y *0*, así como en todos los valores dialécticos donde toma el valor *1*. En el ejemplo, queda bien definido los valores en *0*, *1*, *t* y falta definir en los valores *a*, *s*.

Consideramos ahora un elemento dialéctico cualquiera donde la función tome un valor dialéctico, por ejemplo *a* donde toma el valor *t* y elegimos para la función ***a****(x)* el valor *0* que es menor. Proseguimos de esta manera hasta tener un número de valores 0 igual al número de valores *1*. Con esto queda definido el valor de ***a****(x)* en *a*. Una vez logrado este objetivo, dejamos los restantes valores iguales.

Es claro que la función ***a****(x)*, tal como se ha construido, es menor que ***g****(x)*. Es bastante inmediato que es autodual porque consideremos las dos negaciones $\boldsymbol{N_1}$ = *(01)* y $\boldsymbol{N_2}$ = *(01)(ta)*. La primera es la negación trivial de los reticulados dialécticos simples, la segunda es la negación que intercambia los valores dialécticos donde la función vale *0* con los valores donde la función vale *1*. Es claro que ***a****(x)* es autodual para esta transformación. Con esto queda demostrado el teorema.

El resultado obtenido es plausible que pueda generalizar para los reticulados dialécticos compuestos. En el caso de rango impar, se poseen elementos centrales y la demostración sigue las líneas de la demostración anterior. En el caso de rango par se deben considerar los elementos casi–centrales.

El teorema demostrado permite clasificar las afirmaciones en tres conjuntos disjuntos:

- las afirmaciones autoduales
- las afirmaciones mayores que las autoduales

- las afirmaciones menores que las autoduales

El primero de los conjuntos es frontera de los otros dos, los dos conjuntos definidos son duales entre sí. Esta idea de dualidad ya se había encontrado en la Sección 16 a propósito de las afirmaciones de la lógica temporal. En este contexto adquiere un significado preciso.

Si tenemos en cuenta que la función x y todas las que poseen igual nivel lógico (ver la Definición 3.7) son autoduales, resulta que se puede considerar una clase de afirmaciones especiales, las afirmaciones argumentativas:

Definición 21.2: Se llaman afirmaciones argumentativas a aquellas que son mayores que x o las argumentaciones de igual nivel lógico.

Resulta claro que estas funciones *refuerzan la argumentación* puesto que su valor lógico es superior al argumento. Ya hemos encontrado este tipo de funciones al analizar algunos casos de penetraciones especiales.

Con este análisis se puede considerar completo el estudio de las afirmaciones. El estudio de las funciones de dos variables sigue las mismas líneas que para las afirmaciones. Comencemos por considerar el reticulado de las funciones monótonas, asociativas y distributivas. Este reticulado comprende todas las disyunciones, conjunciones y penetraciones en sentido estricto, además de la suma y el producto lógico. En este reticulado se analizaran las propiedades algebraicas de las funciones de dos variables. La suma y el producto lógico son dos funciones duales entre sí para todas las negaciones. Las penetraciones, a su vez, forman un sub–reticulado cuyos supremos e ínfimos son la suma y el producto lógico.

Resulta claro, a partir de los Teoremas 19.5 y 20.1, que existen penetraciones que no son ni afirmativas, ni sus duales, ni autoduales. Este es el caso de los semi–recticulados de la Figura 8, casos $\mathbf{S_2}$ o $\mathbf{S_3}$, en la situación que exista más de un valor dialéctico entre 0 y 1. De aquí resulta que debe existir, como mínimo, dos elementos dialécticos entre 0 y 1 y, para que el ejemplo no sea trivial, por lo menos otro elemento adicional. Esta situación ocurre en los reticulados dialécticos simples de orden mayor que 2. El caso hegeliano es el caso más simple en el cual hay penetraciones de nuevo tipo y en la Figura 12 se presenta estos casos.

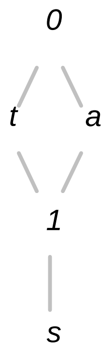


Figura 12: Semi–recticulado cuya suma construye una penetración que no es afirmativa, ni su dual lo es, ni es autodual, en la dialéctica hegeliana. Se construyen otros casos por aplicación del grupo de Piaget a esta composición.

Por otra parte sabemos que una penetración afirmativa puede cubrir a su dual, de modo que no se tiene una situación simple de separación como en el caso de las afirmaciones.

El análisis de las funciones lógicas nos ha llevado a considerar diferentes formas de monotonía en las funciones que presentan interés para la dialéctica. Este hecho nos debe mover a meditar las consecuencias y el significado de la propiedad de monotonía. Las funciones monótonas poseen una cantidad importante de propiedades algebraicas puesto que la relación de orden es el fundamento básico de los reticulados. Ya este hecho motiva su estudio. Pero más allá de esta circunstancia, existen razones lógicas fundamentales que justifican este papel preponderante.

A poco que repasemos el camino recorrido hasta este punto, la propiedad de monotonía aparece en cada uno de los puntos esenciales. Las negaciones son funciones monótonas y esta propiedad deriva directamente de su definición: de la propiedad de De Morgan. En el estudio de la implicación se demuestra una propiedad fundamental vinculada a la monotonía, el Teorema 12.3. La noción de afirmación o de cuestionamiento se vincula con funciones monótonas. Las nociones de conjunción, disyunción y penetración están vinculadas a propiedades de monotonía. Todo esto no es una feliz coincidencia ni el resultado de una imposición algebraica: podría pensarse que la debilidad de la estructura de reticulado obliga a que toda propiedad interesante este vinculada a la monotonía. La razón es más de fondo.

En una lógica dialéctica simple la relación de orden entre los valores lógicos expresa una propiedad esencial. El hecho que “falso”, “tesis” y “verdadero” estén ordenados expresa una propiedad lógica de la realidad. En lógicas dialécticas más complejas pueden encontrarse más niveles intermedios entre los extremos “verdadero” y “falso”. El fondo de la cuestión se encuentra en comprender el carácter que poseen los dos valores extremos dentro del estudio de la realidad material.

El hecho que las funciones que reflejan las propiedades lógicas del Universo sean monótonas indica simplemente que estas funciones “evitan mezclar” los valores extremos de los reticulados con los valores intermedios. No es esto una pretendida demostración sino una argumentación intuitiva sobre el carácter de esta propiedad.

Hasta el presente los valores “verdadero” y “falso” son los únicos que se empleaban en las teorías formales. La matemática aspiraba a fabricar teorías deductivas y a caracterizar todas las proposiciones mediante estos dos valores solamente. Sin embargo, esta manera de actuar condujo a dificultades evidentes. En el siglo XIX los matemáticos abandonaron todo intento de sostener que su trabajo tenía alguna vinculación con la realidad material. En el siglo XX Gödel mostró que el brillante programa deductivo que los positivistas del siglo XIX habían delineado, tenía sus fallas.

A la luz de la Sección 15, sabemos que toda teoría deductiva que sea razonablemente rica, permite construir un enunciado dialéctico. Esto quiere decir, cambiando el punto de vista, que no es posible expresar el conocimiento sobre el Universo solamente con proposiciones “verdaderas” y “falsas” puesto que ni siquiera la Matemática puede con sus propias proposiciones con tan reducido material lógico. Resulta de aquí, en forma incontestable, que el material lógico importante para expresar la lógica del Universo se encuentra precisamente en los valores dialécticos.

Parte 5: dialéctica de predicados

1.23 La contradicción material

Como es inmediato, todas las definiciones elementales de la lógica de predicados se pueden extender en forma directa a la dialéctica. También es inmediato que deben existir áreas de la lógica funcional que son específicas de la dialéctica, así como existen funciones lógicas que son especificas de la dialéctica. El desarrollo de la lógica funcional nos llevara todo el resto del trabajo, en esta sección solamente estudiaremos algunas características de la lógica funcional de una variable.

Este es otro punto en el cual la dialéctica materialista se separa de la lógica tradicional. Para la lógica, las funciones proposicionales son funciones abstractas, para la dialéctica materialista, las funciones proposicionales representan propiedades *materiales*. Una función proposicional es una aplicación del universo real –o de un fragmento del universo– sobre un reticulado. Por esta razón, agregaremos la palabra “material” a la mayoría de los enunciados sobre funciones proposicionales. Esta palabra servirá para diferenciar un significado diferente al significado casi idealista de la lógica proposicional tradicional.

Igual que en la lógica tradicional, se puede llamar *propiedades* a las funciones proposicionales de una única variable y *relaciones* a las funciones proposicionales de varias variables. En esta sección nos interesara caracterizar la propiedad dialéctica de la *contradicción material*:

Definición 22.1: Dos propiedades $\mathbf{F}(x)$ y $\mathbf{G}(x)$ se llaman *contrarias materiales* si para cada valor u de la variable material x se tiene:

$$\mathbf{F}(u) \,.\, \mathbf{G}(u) = 0$$
$$\mathbf{F}(u) + \mathbf{G}(u) = 1$$

es decir, los valores lógicos de las funciones son *contrarios lógicos*.

La noción de contrarios materiales es una noción básica para la dialéctica por algo que resultara de inmediato. Pero antes de entrar en algunas de las propiedades de los contrarios materiales es interesante presentar algunos ejemplos.

La noción de *propiedad* es corriente en matemática. En este caso, se trata de una función proposicional que solamente toma valores “verdadero” y “falso”. La importancia de extender a la dialéctica esta noción resulta del hecho que la función pueda tomar valores dialécticos. La mayoría de las propiedades que empleamos en el lenguaje cotidiano de hecho toman solamente valores dialécticos, porque prácticamente nada de la vida cotidiana es propiamente “verdadero” o propiamente “falso”. Es en este sentido que Lenin decía que en cada frase cotidiana se encuentra implícita toda la dialéctica. Los ejemplos lo mostraran claramente. Consideremos la proposición simple:

Lope **ama**

esta proposición en realidad es una instancia material de una propiedad $\boldsymbol{F}(x)$ de la variable material x que recorre el conjunto de los seres vivos o cualquier otro conjunto apropiado que se desee. La propiedad puede ser expresada como:

$\boldsymbol{F}(x) = x$ **ama**

Interesa investigar los valores lógicos toma esta función proposicional. En la lógica booleana binaria no tenemos opciones puesto que solamente existen dos valores lógicos. En la lógica modal tampoco tenemos mayores opciones. No es plausible que la función tome el valor “tesis” puesto que este valor coincide con su negación y esta propiedad es muy difícil de aceptar en el contexto de esta función proposicional.

El panorama es diferente cuando entramos en dialécticas más complejas. En estos casos cabe preguntarse por los valores que la función proposicional puede tomar. Es comprensible que esta función no tome el valor lógico “verdadero” para ningún x porque este hecho es casi imposible de interpretar. No puede entenderse que la proposición al tomar el valor “verdadero” sea compatible con el significado material de la propiedad “amar”. Así por ejemplo, parecería que excepto algún santo –que sea patológicamente incapaz de odiar– las personas comunes mezclan sus sentimientos y pueden “no amar” ya sea por momentos (lógica temporal) ya sea por grados (lógica modal). También parecería que es una licencia poética –empleada en un celebrado soneto de Quevedo– que una persona pueda “amar” después de muerto. Podríamos continuar esgrimiendo razones para mostrar lo aventurado de suponer que esta función puede tomar el valor lógico “verdadero” así como se aplica a una teoría deductiva formal. Casi las mismas razones se puede esgrimir en el caso del valor lógico “falso”.

El resultado que hemos obtenido es fundamental. Las propiedades que hacen referencia al universo *cambiante*, *material*, *en movimiento*, no pueden –en general– tomar los valores lógicos “verdadero” o “falso”, *deben tomar valores dialécticos*. Este es el contenido de la afirmación clásica de Lenin.

Repasemos entonces el significado de los valores dialécticos. El punto de partida será asignar el valor lógico “tesis” a la situación en que, a la ligera, llamaríamos “verdadero”. Con esta identificación –que es esencialmente casual porque los tres valores dialécticos son indistinguibles– resulta claro que la propiedad toma el valor lógico “antítesis” para los casos que, a la ligera, llamaríamos “falso”. De esta manera, diremos que *x* *ama* toma el valor “tesis” cuando es autentico el sentimiento y toma el valor “antítesis” cuando no lo es.

Pensemos ahora en este otro problema: cual es la propiedad *contraria* de ***F**(x)*. La respuesta es múltiple y compleja. En la lógica binaria se dirá simplemente, puesto que es la única posibilidad, que la propiedad contraria es:

***G**(x)* = ***N F**(x)*

Pero esta manera de ver las cosas no posee la riqueza que la realidad exige. Consideremos las funciones proposicionales:

***H**(x)* = *x* **odia**
***I**(x)* = *x* **es un asceta religioso**
***J**(x)* = *x* **está fuera de sus cabales**
***K**(x)* = *x* **está muerto**

y muchas otras similares, que se vinculan claramente con los estados emocionales de la persona, todas estas propiedades son, de acuerdo con su significado material, propiedades *contrarias* a ***F**(x)* en algún sentido. La lógica binaria no puede considerar este problema, pero tampoco una lógica modal o la dialéctica yin–yang lo puede considerar.

La lógica hegeliana –y todas las dialécticas más complejas– *pueden considerar y resolver* el problema. Puesto que la dialéctica hegeliana posee tres valores dialécticos, cualquier función proposicional que tome valores dialécticos posee *una gran cantidad de propiedades contrarias*. Por cada valor dialéctico existen *dos* valores dialécticos contrarios y de allí que una propiedad que solamente tome valores dialécticos, tal como ***F****(x)*, posee una cantidad enorme de funciones contrarias. A título ilustrativo, una función tal como ***F****(x)*, que esta definida sobre un conjunto que posee *n* instancias materiales –todos los seres humanos, a titulo de ejemplo– posee la cantidad de 2^n funciones proposicionales contrarias. Este número, cualquiera sea la estimación que hagamos para *n*, en el caso de los seres humanos es astronómicamente grande.

He aquí la primera y fundamental diferencia entre la dialéctica de Hegel, definida en $\mathbf{D_3}$, y todas las lógicas más simples: *la dialéctica hegeliana es la más simple donde ocurre el salto en calidad, es la primera en la cual existe un número muy grande de propiedades materiales contrarias en lugar de solamente una*, tal como ocurre en $\mathbf{D_0} = \mathbf{B}$, $\mathbf{D_1} = \mathbf{C_3}$ y $\mathbf{D_2} = \mathbf{B^2}$. Por esta razón la dialéctica hegeliana supone un salto adelante en la comprensión del universo. Se abre todo un nuevo horizonte para el desarrollo de la idea de contrarios.

En resumen, las preguntas tales como: ¿cuál es la propiedad contraria del amor?; ¿cuál, la del odio?; ¿cuál, la de la paciencia?; ¿cuál, la de la clase obrera? poseen en la dialéctica una amplitud sorprendente. En los hechos puede decirse, a priori, que existen una multitud de propiedades contrarias, solamente la realidad material puede resolver el problema, no es, en el fondo un problema lógico sino un problema material. Las lógicas tradicionales, incluyendo la lógica modal y la yin–yang, solamente poseen una propiedad contraria única, la negación de la propiedad considerada. No pueden salir de este estado de cosas.

La existencia de más de dos valores contrarios entre si es el salto en calidad que provoca el extraordinario resultado. Por esta razón ha ocurrido el cambio en calidad. Se trata, una vez más, de la aplicación de las leyes de la dialéctica.

1.24 La penetración de los contrarios

Con los elementos ya presentados se puede analizar ahora los diferentes problemas que ocurren en la realidad material al considerar las operaciones lógica con propiedades o con funciones proposicionales más complejas.

Las operaciones de conjunción o disyunción se puede extender directamente a las funciones proposicionales. Su significado, como ya se ha adelantado, esta asociado a la multiplicidad de ideas que existe en el Universo. Sin embargo, existe una forma particular de la conjunción y disyunción que solamente ocurre al nivel de las propiedades materiales. En la definición que sigue se introduce el concepto.

Definición 23.1: Se dice que $\boldsymbol{H}$ es una *conjunción material* de dos funciones proposicionales $\boldsymbol{F}$ y $\boldsymbol{G}$, todas definidas sobre las mismas variables materiales, si para todo valor de las variables materiales ocurre:

$$\boldsymbol{H} \leq \boldsymbol{F} \,.\, \boldsymbol{G}$$

En forma dual, la *disyunción material* exige:

$$\boldsymbol{H} \geq \boldsymbol{F} + \boldsymbol{G}$$

Como es inmediato, la aplicación de una operación lógica de conjunción o disyunción conduce a una operación material, pero la realidad material acepta una infinita mayor riqueza de conceptos, a pesar de que ha se ha mostrado que en la dialéctica existe una gran cantidad de funciones nuevas que generalizan la lógica binaria.

Al estudiar las funciones penetración ocurre un paralelismo muy grande. La siguiente definición establece la importante noción de penetración material:

Definición 23.2: Sean $\boldsymbol{F}$ y $\boldsymbol{G}$ dos funciones proposicionales; se dice que la función proposicional $\boldsymbol{H}$, definida sobre las mismas variables materiales, es una *penetración material* de ambas si se cumple para todas las instancias materiales:

$$\boldsymbol{F} \,.\, \boldsymbol{G} \leq \boldsymbol{H} \leq \boldsymbol{F} + \boldsymbol{G}$$

Como es natural, existen una cantidad enorme de funciones proposicionales que son penetración de otras dos. En particular, aplicando una operación penetración se obtiene una función proposicional que es penetración material de las dos primeras.

De las definiciones surge un teorema muy simple, pero de consecuencias poderosas relativo al caso especialísimo de operación con funciones proposicionales contrarias.

Teorema 23.1: Si ***F*** y ***G*** son contrarios materiales entonces se tiene:

- toda conjunción material de ***F*** y ***G*** es idénticamente "falsa".
- toda disyunción material de ***F*** y ***G*** es idénticamente "verdadera".
- toda función proposicional es penetración material de ***F*** y ***G***.

Este resultado formaliza uno de los puntos más importantes de la dialéctica, la penetración de los contrarios. El Teorema 23.1 establece que no es posible, por consideraciones *formales* conocer el resultado de la penetración de los contrarios: cualquier resultado es potencialmente posible. Este es un punto fundamental. Como teoría formal, la dialéctica establece que *no existe ninguna restricción formal* a la penetración de los contrarios, es un problema enteramente material de la realidad material.

Un punto final nos queda en el problema de los contrarios. Buena parte de los resultados obtenidos son negativos. Existe una multitud de funciones proposicionales contrarias de una dada, poco o nada sabemos de la penetración de funciones proposicionales contrarias. Tal pareciera que la teoría nos deja en un punto muerto. Sin embargo es imprescindible que sea así.

Toda vez que se identifican los elementos contrarios materiales se da un paso importante en el análisis dialéctico de la realidad. A partir de los resultados que se obtienen se pueden formular proposiciones. La técnica de formulación de estas proposiciones constituye el corazón de la *dialéctica declarativa*. Este es un aspecto importante. Una vez que se formulan proposiciones se puede estar en los mismos casos que se estudiaron en la Tercera Parte. En el fondo, todos los problemas paradójicos nacen de un planteo declarativo en un contexto equivocado. Cada una de las afirmaciones, por ejemplo del problema de Protágoras poseen sentido y pueden resultar de un análisis de la realidad. Este conjunto de afirmaciones es un *conocimiento declarativo*. Bien puede ocurrir, como ocurrió en los ejemplos considerados, que este ejemplo declarativo, lejos de ser binario, sea dialéctico. Por esta razón, al analizar la realidad a partir de premisas, no se puede prejuzgar cual es la estructura dialéctica precisa que involucra estos planteos, de otra manera se caerá una y otra vez en paradojas como las consideradas.

La imposibilidad de comprender el Universo mediante teorías deductivas es, en el fondo, el principal resultado de la dialéctica. Los resultados negativos de esta Tercera Parte son un reflejo de este hecho. Se llega así a uno de los bordes de la lógica, pero también se llega a una nueva área: el análisis de contrarios.

La mayoría de las obras dialécticas escritas hasta la fecha se ocupan de lo que podemos llamar *el análisis de contradicciones*. En el "Manifiesto Comunista" se hace un breve análisis de las clases contrarias a lo largo de la historia. En "El Capital" se realiza un profundo análisis de las principales contradicciones de la sociedad capitalista. El propio Hegel no hace casi otra cosa que desenterrar categorías contrarias y presentarlas a lo largo de su obra. La mayoría de los análisis políticos no son sino estudios de contradicciones.

El análisis de los contrarios materiales es el punto de partida para el establecimiento de las tesis dialécticas. Sobre este edificio de conocimientos se puede construir, con las herramientas formales, un pensamiento dialéctico coherente.

Corresponde en este punto detenerse un momento en el problema de *las clases* desde el punto de vista dialéctico. De acuerdo con las definiciones tradicionales, a partir de los cuantificadores universales se construye la noción lógica de clase. De acuerdo con esto se puede realizar la definición:

Definición 23.3: Dada una propiedad ***F(x)*** se define la clase ***F*** de los elementos *x* como la proposición:

x pertenece a la clase ***F*** = ***F(x)***

Esta definición establece que existen diferentes grados de pertenencia de un elemento a una clase F, según sea el valor lógico que adopta la proposición ***F(x)***. Si adoptamos una interpretación modal para la dialéctica, en esta manera de definir las clases se encuentra encerrada toda la llamada "fuzzy logic". Por el contrario, en la interpretación temporal de la lógica se encuentra la pertenencia dinámica de los individuos a las clases.

Para la lógica formal existe una única noción de *unión* de clases, en la dialéctica las nociones son mucho más ricas. Podemos realizar la siguiente definición:

Definición 23.4: Se llama *unión* de las clases definidas por las propiedades ***F**(x)* y ***G**(x)* a toda clase definida por la propiedad:

$$\mathbf{U}(x) \geq \mathbf{F}(x) * \mathbf{G}(x)$$

donde ***** es una penetración afirmativa.

Como consecuencia de esta definición, es claro que la unión de clases es asociativa y conmutativa puesto que posee una definición simétrica. La disyunción de propiedades también conduce a la unión de las clases. También es interesante observar que existen *muchas* clases unión de dos dadas, según sea la operación de penetración o de disyunción que se emplee. La *intersección* de clases se define en forma dual, mediante las operaciones duales de la penetración afirmativa.

A partir de estas nociones se edifica toda una nueva teoría de clases que tiene la importante propiedad de no exigir la pertenencia absoluta. La teoría dialéctica de las clases ciertamente acepta matices modales y temporales que la lógica binaria no puede explicar.

1.25 Los cuantificadores dialécticos

En la lógica binaria se introduce la noción de cuantificador como un elemento esencial del estudio de las funciones proposicionales. Como es natural, estas ideas se puede generalizar directamente a la dialéctica.

Resulta inmediato, puesto que están definidas las operaciones "." y "+", en cualquier reticulado, existe un cuantificador similar al existencial y uno similar al universal definido de la misma manera que en la lógica binaria. Sin embargo hay buenas razones para pensar que esta manera de proceder deja muchos aspectos de la dialéctica de lado.

Hegel en su "Ciencia de la Lógica" dedica un largo volumen a lo que llama la "teoría del ser". Por este solo hecho debemos estar advertidos que la "teoría del ser" (los cuantificadores dialécticos) debe ser bastante más compleja que una extensión rutinaria de las ideas de la lógica binaria.

El camino metodológico que emplearemos para analizar el problema de los cuantificadores será esencialmente formal. De las dialécticas naturales, del lenguaje cotidiano o del monumental estudio de Hegel, podemos extraer una idea precisa: en la dialéctica deben existir mucho más que los dos simples cuantificadores lógicos puesto que la idea de "ser" o de "existir" admite muchísimas variantes y modalidades. La teoría de la dialéctica debería suministrarnos un terreno fértil en el cual estas ideas imprecisas admitan un desarrollo.

Tal como hemos considerado antes, la lógica binaria es una simplificación, un homomorfismo demasiado radical de las propiedades estructurales del Universo. Por su misma esquematicidad, la lógica binaria solamente nos suministra indicios acerca del problema. Analicemos la naturaleza de estos indicios.

Para la lógica binaria clásica, los cuantificadores son *aplicaciones de una función proposicional sobre un valor lógico* y esta concepción es acertada. Pero existe una multiplicidad de aplicaciones posibles y no parece acertado suponer que todas representen cuantificadores. Es natural entonces exigir que esta aplicación sea *intrínseca* en el sentido que se ha dado a esta termino en la Cuarta Parte. De acuerdo con esto podemos elaborar la primera definición general de cuantificador dialéctico.

Definición 24.1 (primer intento): Se llama *cuantificador* actuando sobre la variable x, a toda función $\mathbf{K}$ que lleve una función proposicional $\boldsymbol{F}(x,\ldots)$ sobre un valor lógico $\mathbf{K}x\,\boldsymbol{F}(x,\ldots)$ y que sea monótona, es decir que si:

$$\boldsymbol{F}(x,\ldots) \leq \boldsymbol{G}(x,\ldots)$$

entonces se cumple:

$$\mathbf{K}x\,\boldsymbol{F}(x,\ldots) \leq \mathbf{K}x\,\boldsymbol{G}(x,\ldots)$$

Esta definición presenta un máximo de generalidad, pero todavía no conduce a los cuantificadores que reflejan las propiedades más interesantes del "ser". Por esta razón debemos especializar esta definición. Parece natural buscar cuantificadores que posean estructura similar a los de la lógica binaria. Estos cuantificadores se arman mediante una función lógica, asociativa, conmutativa y monótona, aplicada a cada uno de las instancias materiales de la función proposicional. Si intentamos conservar el procedimiento, llegamos a la siguiente definición:

Definición 24.1 (segundo intento): Se llama *cuantificador* de la función proposicional $\mathbf{F}(x,\ldots)$, asociado a la operación dialéctica monótona, asociativa y conmutativa, representada por "*", a la expresión:

$$\mathbf{F}(x_1,\ldots) * \mathbf{F}(x_2,\ldots) * \ldots * \mathbf{F}(x_n,\ldots)$$

extendida a todos los valores de las variables materiales sobre las cuales se cuantifica.

Como es inmediato, esta segunda definición especializa a la primera definición y contiene como caso particular a los cuantificadores definidos en la lógica binaria. En efecto, puesto que las operaciones "." y "+" son operaciones monótonas, asociativas y conmutativas, los dos cuantificadores clásicos se encuentran comprendidos en la definición. Más aun, es posible demostrar un resultado inverso:

Teorema 24.1: Los únicos cuantificadores dialécticos, no triviales, en $\mathbf{B} = \mathbf{D_0}$ son los derivados de la conjunción "." y de la disyunción "+".

Demostración 24.1: La demostración se reduce a observar que las únicas funciones monótonas, asociativas y conmutativas en $\mathbf{B} = \mathbf{D_0}$ son las indicadas.

El Teorema 24.1 asegura la consistencia de las definiciones, pero todavía deja demasiado terreno libre. El número de cuantificadores dialécticos en un reticulado dado no es muy grande. En los reticulados más complejos la tarea de encontrar todos los cuantificadores es muy tediosa pero sistemática [18].

Las definiciones presentadas, si bien son un interesante material para futuras investigaciones, deben ser restringidas todavía más a efectos de ganar en comprensión sobre la dialéctica. El tercer y ultimo paso de refinamiento consiste en especializar las ideas y limitarse a aquellos cuantificadores que expresen ideas vinculadas al "ser". La especialización es natural y consiste en elegir el subconjunto más importante de

[18] Esto fue escrito antes de emplear programas de computadora para realizar esta búsqueda sistemática.

las funciones monótonas, asociativas y conmutativas.

Definición 24.2: Se llama cuantificador *existencial* al proveniente de la penetración argumentativa. Se llama cuantificador *tipo existencial* al proveniente de una disyunción. Se llama cuantificador *universal* al proveniente de penetración dual de la argumentativa. Se llama cuantificador *tipo universal* al proveniente de una conjunción. Se llama cuantificador *del ser dialéctico* –o *dialéctico* a secas– al proveniente de una operación de penetración. Se llama cuantificador *afirmativo* a todo cuantificador dialéctico que proviene de una penetración afirmativa.

El panorama de los cuantificadores queda ahora completamente definido. Existen tres grandes grupos asociados a las ideas de del “ser” y estos conjuntos están asociados a los tres grandes grupos de funciones lógicas. En la simplificación brutal que realiza la lógica binaria se pierde enteramente un tipo de cuantificadores y es precisamente de este grupo de donde saldrán las ideas más interesantes.

Desde el punto de vista de la notación, emplearemos una extensión natural. Representamos con $ y " a los cuantificadores existenciales y universales respectivamente, tal como es habitual. Representamos con **K**$ y **K**" a los cuantificadores de tipo existencial y universal respectivamente. Representamos con **K** a los cuantificadores dialécticos. Como caso particular, los cuantificadores afirmativos y sus duales serán representados, respectivamente por **K**" y **K**$ [19].

Teorema 24.2: Para todo cuantificador y toda función proposicional se cumple:

$$\mathbf{K}"x\ \boldsymbol{F}(x,\ldots) \leq\ "x\ \boldsymbol{F}(x,\ldots)$$
$$"x\ \boldsymbol{F}(x,\ldots) \leq \mathbf{K}x\ \boldsymbol{F}(x,\ldots) \leq \$x\ \boldsymbol{F}(x,\ldots)$$
$$\$x\ \boldsymbol{F}(x,\ldots) \leq \mathbf{K}\$x\ \boldsymbol{F}(x,\ldots)$$

Demostración 24.2: Las propiedades son inmediatas a partir de la monotonía y del teorema 20.3.

[19] Seria deseable emplear las letras en forma invertida, tal como lo dicta la tradición, pero esto plantea dificultades importantes tipográficas en la presentación de este trabajo. En el futuro seria agradable respetar la tradición.

Este teorema establece que dada una función predicativa los cuantificadores crean un reticulado de valores lógicos, homomorfa al reticulado de conjunciones, disyunciones y penetraciones. La cuantificación de las funciones materiales que describen el contenido lógico del Universo se presenta entonces como un homomorfismo, idea que venimos desarrollando desde el comienzo del presente trabajo. Según sea la dialéctica que se emplee este homomorfismo posee propiedades muy diferentes. El caso binario da la imagen más restringida de todos los casos.

Teorema 24.3: La condición necesaria y suficiente para que un cuantificador de tipo universal valga 1 es que la función proposicional cuantificada valga idénticamente 1. En forma dual, la condición necesaria y suficiente para que un cuantificador de tipo existencial valga 0 es que la función proposicional cuantificada valga idénticamente 0.

Demostración 24.3: Demostremos el primer caso. Es inmediato que la condición es suficiente: la disyunción de valores 1 es 1. Por el contrario, si el cuantificador vale 1 se tiene, puesto que la mayor de las funciones disyunción es el producto lógico:

$$\boldsymbol{F}(x_1,\ldots)\ .\ \boldsymbol{F}(x_2,\ldots)\ \ldots \geq \mathbf{K}\,''\,x\ \boldsymbol{F}(x,\ldots) = 1$$

de donde sigue que todos los valores cumplen $F(x_i,\ldots) = 1$. En forma dual se demuestra la segunda parte.

Teorema 24.4: Se considera a u una instancia de la variable x. Las siguientes propiedades son válidas para cualquier cuantificador:

- Si $\boldsymbol{F}(u,\ldots) = 0$ entonces el cuantificador universal y todos los cuantificadores de tipo universal y de tipo afirmativo son 0.
- Si $\boldsymbol{F}(u,\ldots) = 1$ entonces el cuantificador existencial y todos los cuantificadores de tipo existencial y de tipo afirmativo dual son 1.
- Si un cuantificador universal o de tipo universal es una tesis entonces todas las instancias de la función son tesis.

Demostración 24.4: La primera propiedad es válida para el cuantificador universal y para los cuantificadores de tipo afirmativo, luego, por el

Teorema 24.2 también lo es en el caso general. La segunda es la propiedad dual. La tercera se reduce por absurdo a la primera. Con esto se completa el teorema.

Teorema 24.5: Si consideramos un cuantificador –que designaremos por **K** en cualquiera de los casos– y la operación de composición asociada –que designaremos por “*” en cualquiera de los casos– se tiene la propiedad:

$$\mathbf{K}x\ (\ \boldsymbol{F}(x,\dots) * \boldsymbol{G}(x,\dots)\ ) = \mathbf{K}x\ \boldsymbol{F}(x,\dots) * \mathbf{K}x\ \boldsymbol{G}(x,\dots)$$

Demostración 24.5: Es inmediata a partir de la propiedad asociativa y conmutativa de la composición.

Las definiciones realizadas permiten investigar las propiedades básicas de los cuantificadores dialécticos por extensión de las propiedades en la lógica binaria. Las dos primeras propiedades de los cuantificadores hacen referencia a la particularización de los universales y la existencialización de los particulares:

Teorema 24.6: Para el cuantificador universal y para todo cuantificador de tipo universal se cumple, si u es una instancia de la variable x:

$$\text{"}x\ \boldsymbol{F}(x,\dots)\ \text{Þ}\ \boldsymbol{F}(u,\dots)$$
$$\mathbf{K}\text{"}x\ \boldsymbol{F}(x,\dots)\ \text{Þ}\ \boldsymbol{F}(u,\dots)$$

En forma dual, para el cuantificador existencial y para todo cuantificador de tipo existencial se cumple:

$$\boldsymbol{F}(u,\dots)\ \text{Þ}\ \ \$x\ \boldsymbol{F}(x,\dots)$$
$$\boldsymbol{F}(u,\dots)\ \text{Þ}\ \mathbf{K}\$x\ \boldsymbol{F}(x,\dots)$$

Demostración 24.6: Consideremos el primer caso. Por la definición de cuantificador universal y por la propiedad básica de la penetración argumentativa dual se tiene:

$$\text{"}x\ \boldsymbol{F}(x,\dots) \leq\ \boldsymbol{F}(u,\dots)$$

puesto que u es una de las instancias de la variable x. En el caso de un cuantificador de tipo universal se tiene:

$$\mathbf{K}\text{"}\,x\,\boldsymbol{F}(x,\ldots) \leq \boldsymbol{F}(x_1,\ldots)\ .\ \boldsymbol{F}(x_2,\ldots) \ldots \leq \boldsymbol{F}(u,\ldots)$$

por la misma razón. Por el Teorema 12.3 se cumple la implicación. En forma dual se demuestra el otro caso.

Es sumamente interesante observar que juega un papel fundamental las propiedades de monotonía, asociatividad y conmutatividad de las funciones conjunción y disyunción a través del Teorema 19.6.

El Teorema 24.6 permite suponer que las propiedades de los cuantificadores dialécticos siguen las mismas líneas de la lógica binaria. Este punto de vista esta profundamente equivocado. En el tratamiento clásico, a los axiomas de la lógica proposicional se agregan los enunciados del Teorema 24.6 como axiomas complementarios para la teoría de la lógica funcional. Podría pensarse que –a menos que el conjunto de axiomas de la lógica proposicional es más reducido– este esquema se prolonga fácilmente. Esta manera de pensar es equivocada por cuanto, además de los nuevos axiomas, la lógica funcional deductiva exige dos nuevos criterios de fabricación de tesis y estos criterios, tal como demuestra el Teorema 24.8 *no son válidos*. Por esta razón, la lógica dialéctica debe ser edificada sobre bases nuevas. Este resultado afirma nuevamente el carácter profundamente diferente que posee la lógica funcional binaria y la dialéctica funcional sobre reticulados de orden tres o más.

Teorema 24.7: Sea p una proposición y $\boldsymbol{F}(x,\ldots)$ una función predicativa tal que para toda instancia de x se cumpla:

$$\boldsymbol{F}(x,\ldots)\ \text{Þ}\ p$$

entonces, para todo cuantificador dialéctico ocurre:

$$\mathbf{K}x\,\boldsymbol{F}(x,\ldots)\ \text{Þ}\ p$$

Demostración 24.7: Supongamos que las hipótesis sean ciertas pero que la implicación final sea falsa, se tiene entonces que $p = 0$ en tanto que $\mathbf{K}x$ $\boldsymbol{F}(x,\ldots)$ es una tesis. Pero si $p = 0$, por las hipótesis, debe ocurrir que para cada instancia de *x*:

F*(x,...)* = 0

de otro modo las implicaciones no serían una tesis. Pero entonces, la suma de todas las instancias es *0* y toda función penetración es menor o igual que la suma de sus argumentos; de allí que se tenga:

K*x* ***F****(x,...)* ≤ *0*

en contra de que sea una tesis. Luego queda demostrado por absurdo el teorema.

Teorema 24.8: Sea *p* una proposición y ***F****(x,...)* una función predicativa tal que para toda instancia de *x* se cumpla:

p Þ ***F****(x,...)*

entonces *no es cierto* en general que:

p Þ **K**" *x* ***F****(x,...)*

Demostración 24.8: Apliquemos la técnica general. Para que valga *0* la conclusión debe ocurrir que en tanto que **p** es una tesis:

K" *x F(x,...)* = *0*

y esta situación es perfectamente compatible con la validez de la hipótesis: cada instancia de ***F****(x,...)* puede tomar un valor dialéctico de modo que el producto lógico de todas las instancias valga *0* y de allí que el cuantificador universal sea *0*. Con esto queda demostrado el teorema.

Teorema 24.9: Sea *p* una proposición y ***F****(x,...)* una función proposicional tal que para toda instancia de la variable *x* se cumpla:

p Þ ***F****(x,...)*

Entonces, para el cuantificador existencial y para todo cuantificador afirmativo se cumple:

p Þ "*x F(x,...)*
p Þ **K**" *x F(x,...)*

Demostración 24.9: En efecto, supongamos que la conclusión sea falsa, debe ocurrir que *p* es una tesis en tanto que:

"*x F(x,...) = 0*
K" *x F(x,...) = 0*

Pero, puesto que se trata de una penetración afirmativa, alguna instancia de la variable *x* debe tener valor *0* y de allí que se contradiga una de las proposiciones de partida. Queda así demostrado por absurdo la validez del teorema.

Con estos resultados se obtiene una conclusión importante: se cumplen los axiomas y los criterios de producción de tesis de la lógica tradicional. El Teorema 24.6 establece la validez de los dos axiomas clásicos de la cuantificación. Los Teoremas 24.7 y 24.9 establecen la validez de los criterios de producción de tesis. De este modo se entienden las nociones.

A modo de finalización de esta introducción al tema de los cuantificadores es interesante poner un ejemplo dialéctico puro y de aclarar una cuestión pendiente. Los ejemplos tomados de Lope o de Petrarca dejaban un punto por aclarar. Si bien se había podido vincular la técnica lógica que agrupar contrarios como una función penetración, quedaba pendiente la manera mediante la cual se vinculaban entre sí las diferentes contradicciones. Este es el momento de agregar un elemento adicional. Estos sonetos que intentan definir una propiedad compleja del hombre, como lo es el amor, a la luz de las definiciones presentadas poseen una estructura muy precisa: son *cuantificadores dialécticos*. Analicemos las implicaciones de esta propuesta. Desde un punto de vista formal, son propiedades asociadas entre sí mediante operaciones de penetración, obviamente asociativas y conmutativas. Esto nos lleva de la mano a que los intentos de Lope, Petrarca y una multitud de poetas, se pueden resumir en una forma muy poco poética pero muy compacta desde el punto de vista lógico: *el amor es una forma del ser dialéctico de las pasiones humanas*. Esta propuesta indica que si designamos con $\boldsymbol{P}(x\ ,y)$ a las pasiones humanas e imaginamos que y recorre los diferentes seres humanos en tanto que x representa las diferentes variables materiales –y aquí no se puede entrar demasiado en el tema, este es un campo reservado a psicólogos y literatos– las formas poéticas se reducen a decir que el amor, una función proposicional $\boldsymbol{A}(y)$ tiene por expresión:

$$\boldsymbol{A}(y) = \mathbf{K}x\ \boldsymbol{P}(x,y)$$

1.26 Propiedades deductivas de los cuantificadores

Si bien es posible establecer una teoría deductiva sobre las proposiciones cuantificadas, no es esta la manera natural de proceder en la mayoría de los casos dialécticos. Es más interesante analizar las propiedades deductivas de los cuantificadores dialécticos. En esta sección comenzaremos por generalizar las propiedades de los cuantificadores existenciales y universales. Agregaremos después las propiedades de los cuantificadores dialécticos. Como en la lógica binaria, existe dualidad entre las propiedades de uno y otro y este hecho obedece a la existencia del grupo de Piaget.

Teorema 25.1: Para todo cuantificador (de tipo) universal o (de tipo) existencial se cumple:

$$''x\ ''y\ \boldsymbol{F}(x,y) = ''y\ ''x\ \boldsymbol{F}(x,y)$$
$$\$x\ \$y\ \boldsymbol{F}(x,y) = \$y\ \$x\ \boldsymbol{F}(x,y)$$
$$\mathbf{K}''x\ \mathbf{K}''y\ \boldsymbol{F}(x,y) = \mathbf{K}''y\ \mathbf{K}''x\ \boldsymbol{F}(x,y)$$
$$\mathbf{K}\$x\ \mathbf{K}\$y\ \boldsymbol{F}(x,y) = \mathbf{K}\$y\ \mathbf{K}\$x\ \boldsymbol{F}(x,y)$$

Demostración 25.1: Consideremos el primer caso. Es claro que una y otra expresión difieren en el orden en que toma la aplicación de la función composición. Puesto que la función es asociativa y conmutativa el resultado es válido. En forma similar se demuestran las otras propiedades.

Son inmediatas las propiedades que derivan de las leyes de dualidad y de De Morgan.

Teorema 25.2: Para todo cuantificador de tipo existencial existe un cuantificador de tipo universal –y recíprocamente– tal que se cumplan las proposiciones:

> ***N(*K**" *x* ***F**(x,...))* = **K**$*x* ***NF**(x,...)*
> ***N(*K**$*x* ***F**(x,...))* = **K**" *x* ***NF**(x,...)*
> **K**" *x* ***NF**(x,...)* Þ ***N(*K**" *x* ***F**(x,...))*
> ***N(*K**$*x* ***F**(x,...))* Þ **K**$*x* ***NF**(x,...)*

Demostración 25.2: Consideremos la primera proposición. Dada una conjunción monótona, asociativa y conmutativa existe una disyunción con las mismas propiedades que es dual y de allí la validez del primer caso. El segundo caso se demuestra en forma dual. El tercer caso es una aplicación del Teorema 24.3 a la función ***NF**(x,...)* y del primer caso:

> **K**" *x* ***NF**(x,...)* Þ **K**$*x* ***NF**(x,...)* = ***N(*K**" *x* ***F**(x,...))*

El cuarto caso se demuestra en forma dual.

Teorema 25.3: Para todo par de cuantificadores son tesis:

> **K**" *x* ***F**(x,...)* + **K**$*x* ***NF**(x,...)*
> **K**$*x* ***F**(x,...)* + **K**" *x* ***NF**(x,...)*

Demostración 25.3: Si no fuera una tesis, debería ocurrir:

> **K**" *x* ***F**(x,...)* = 0
> **K**$*x* ***NF**(x,...)* = 0

Por el Teorema 24.3, la función proposicional ***NF**(x,...)* debe ser idéntica a *0*. Sigue entonces que la función proposicional ***F**(x,...)* debe ser idéntica a *1* y entonces, por el Teorema 24.3 se llega a una contradicción con la primera igualdad. En el segundo caso se procede en forma similar, también aplicando el Teorema 24.3 al cuantificador existencial. Vale la pena notar que en la demostración no es necesario que los cuantificadores **K**$ y **K**" sean duales entre sí, el teorema es válido en general.

Es posible demostrar algunos de los resultados clásicos de la lógica binaria, como extensión de las propiedades de los cuantificadores.

Teorema 25.4: Las siguientes proposiciones son tesis, para todo cuantificador en todo reticulado; *u* designa una instancia de la variable *x*, *p* designa una proposición que no contiene a la variable:

1 (***F***(u) Þ p) Þ (**K**"x ***F***(x) Þ p)
2 (**K**$x ***F***(x) Þ p) Þ (***F***(u) Þ p)
3 (p Þ **K**"x ***F***(x)) Þ (p Þ ***F***(u))
4 (p Þ ***F***(u)) Þ (p Þ **K**$x ***F***(x))
5 (**K**$x ***F***(x) Þ p) Þ (**K**"x ***F***(x) Þ p)
6 (p Þ **K**"x ***F***(x)) Þ (p Þ **K**$x ***F***(x))
7 **K**"x (***F***(x) Þ ***G***(x)) Þ (**K**$x ***F***(x) Þ **K**$x ***G***(x))
8 (**K**"x ***F***(x) + **K**"x ***G***(x)) Þ **K**"x (***F***(x) + ***G***(x))
9 **K**$x (***F***(x) + ***G***(x)) Þ (**K**$x ***F***(x) + **K**$x ***G***(x))

Demostración 25.4: Estas proposiciones se demuestran igual que en el Teorema 12.4, se supone que valen *0* y se llega a una contradicción. Se aplica entonces el teorema del razonamiento por el absurdo. La primera proposición no sería tesis solamente si:

K"x ***F***(x) Þ p = 0

en tanto que es una tesis: ***F***(x) Þ *p*. Pero de aquí resulta que debería ocurrir que *p = 0* en tanto que **K**"x ***F***(x) fuera una tesis, pero esto contradice el hecho que, puesto que *p = 0*, debe ocurrir ***F***(u) = 0 y de allí que existe una instancia de ***F***(x) que no es tesis, en contra de lo que debe ocurrir. Las restantes proposiciones se demuestran en una forma similar.

1.27 El devenir dialéctico

Es un hecho trivial que las lenguas modernas poseen una multitud de verbos que expresan *acciones*. También es trivial que estas acciones puedan ser pasadas o futuras y no solamente presentes. Sin embargo, hasta el presente, la lógica formal solamente acepta que las acciones puedan ocurrir en un presente abstracto, eterno e ideal. Los filósofos idealistas –con Platón a la cabeza– eliminaron esta flagrante contradicción entre la más trivial realidad y la más sesuda teoría de un solo golpe: *lo que cambia no existe*. De este modo tan simple, la filosofía y la ciencia no deben ocuparse de expresiones tales como ***A*** *era* ***B***, ***A*** *deviene* ***B***. Pero el hombre común que trabaja, que crea la tecnología, que hace marchar las maquinas, que inventa lo que no existía y repara lo que antes no funcionaba, el hombre que modifica el universo y modifica su propio destino no puede aceptar este planteo brutal. Por esta razón el hombre común y anónimo, materialista espontaneo, organizo lenguajes naturales donde es posible establecer relaciones temporales.

La ciencia introdujo un camino lateral para analizar el movimiento: *el tiempo*. Newton en el Scholium de sus “Principia” lo decía así:

> El tiempo absoluto, verdadero y matemático, por si mismo y por su propia naturaleza, fluye en forma homogénea sin ninguna relación con nada exterior (...)

Esta solución fue aceptada por la visión mecanicista del universo sin exigir una noción más poderosa, una noción de devenir que el pensamiento espontaneo de la humanidad poseía desde siglos atrás. Así es que leemos en Heráklito pasajes muy celebres donde se dice:

> 12. Aun lo que se bañan en los mismos ríos se bañan en diversas aguas (...).
>
> 49a. En los mismos ríos nos bañamos y no nos bañamos en los mismos y parecidamente somos y no somos.
>
> 91. No hay manera de bañarse dos veces en la misma corriente; que las cosas se disipan y de nuevo se reúnen, van hacia el ser y se alejan del ser. [10]

Aparece aquí una de las expresiones más clásicas del *devenir*: la mutabilidad del acontecer y la penetración de los contrarios en el acontecer.

La característica del acontecer es la transformación de una propiedad en su propiedad contraria: acontecer es negar, esta es la lección clara de Heráklito y la única noción posible de movimiento desde el punto de vista formal. De acuerdo con esto la descripción formal del *devenir* se vincula a dos funciones predicativas que expresan aquello de deviene uno en otro. Así es que se establece:

Definición 26.1: Dadas dos funciones proposicionales $\boldsymbol{A}(x,...)$ y $\boldsymbol{B}(x,...)$, se define la proposición $\boldsymbol{A}$ *deviene* $\boldsymbol{B}$ como:

$$\boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B} = \mathbf{K}x\ (\ \boldsymbol{NA}(x,...) * \boldsymbol{B}(x,...)\ )$$

donde “*” es una *penetración principal* que define al cuantificador $\mathbf{K}$ y $\boldsymbol{N}$ es la negación para la cual “*” es autodual.

Esta definición puede ser interpretada en palabras en una forma muy expresiva: $\boldsymbol{A}$ *deviene* $\boldsymbol{B}$ significa que *ocurre una penetración dialéctica (principal) entre* $\boldsymbol{B}$ *y la negación de* $\boldsymbol{A}$.

Se completa así el panorama de los cuantificadores. Las penetraciones principales se asocian con las formas del devenir. Es interesante observar que el devenir es una estructura similar a un cuantificador, es una aplicación de una pareja de funciones proposicionales sobre un valor lógico. Sin embargo posee una forma particular que no posee antecedente directo en la lógica binaria. En efecto, en la lógica binaria no existe nada semejante a una penetración autodual. En los reticulados dialécticos simples es posible definir varias proposiciones en devenir por lo mismo que existen varias penetraciones principales. En el caso hegeliano sabemos que existen doce casos diferentes de penetraciones principales que se agrupan en dos grandes estructuras lógicas, tal como muestra la Figura 11. Estas familias de funciones permiten los enunciados declarativos que arman el cuerpo del pensamiento dialéctico.

A partir de esta definición general se pueden demostrar un conjunto de propiedades elementales que ayudan a precisar el significado lógico de esta nueva noción.

Teorema 26.1: Para toda penetración principal y su negación asociada se cumplen las siguientes propiedades:

1 $\mathbf{K}x\ \boldsymbol{A}(x,...) = N'\ \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{A}$
2 $\boldsymbol{A} \to \boldsymbol{NB} = \boldsymbol{B} \to \mathrm{N}\ \boldsymbol{A}$
3 $\boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B} = (\boldsymbol{A} \to \boldsymbol{N}\ \boldsymbol{A})*(\ \mathbf{K}x\ \boldsymbol{B}(x,...)) = (\mathbf{K}x\ \boldsymbol{N}\ \boldsymbol{A}(x,...) * \mathbf{K}x\ \boldsymbol{B}(x,...))$
4 $\boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B} = \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}*\boldsymbol{N}\ \boldsymbol{A}$
5 $(\boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B})*(\boldsymbol{B} \to \boldsymbol{C}) = (\boldsymbol{A} \to \boldsymbol{D})*(\boldsymbol{B} \to \boldsymbol{C})$
6 $\boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}*\boldsymbol{C} = (\boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B})*(\ \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{C})$

7 $(\mathbf{A} \to \mathbf{B}).(\mathbf{B} \to \mathbf{C})$ Þ $(\mathbf{B} \to \mathbf{B})*(\mathbf{A} \to \mathbf{C})$
8 $\mathbf{A} * \mathbf{B} \to \mathbf{C} * \mathbf{D} = (\mathbf{A} \to \mathbf{B})*(\mathbf{C} \to \mathbf{D})$
9 $\mathbf{A} * \mathbf{N} \mathbf{A} \to \mathbf{B} = (\mathbf{A} \to \mathbf{B})*(\mathbf{N} \mathbf{A} \to \mathbf{B})$
10 $\mathbf{A} * \mathbf{B} \to \mathbf{N} \mathbf{A} = \mathbf{A} \to \mathbf{N}\mathbf{B} = \mathbf{B} \to \mathbf{N} \mathbf{A}$

Demostración 26.1: La propiedad 1 se obtiene ordenando los elementos de la composición y aplicando las propiedades asociativas, conmutativas e idempotencia de la definición. Otro tanto ocurre con las propiedades 2, 3, 4, 5 y 6. La propiedad 7 resulta de observar que se cumple:

$$(\mathbf{N}a * b).(\mathbf{N}b * c) \leq \mathbf{N}a * b * \mathbf{N}b * c$$

La propiedad 8 obliga a considerar el carácter autodual de la penetración y es consecuencia de que:

$$\mathbf{N}(a * b) * c * d = \mathbf{N}a * \mathbf{N}b * c * d$$

La propiedad 9 resulta de la 8 con elección apropiada de las variables. La propiedad 10 resulta de la igualdad:

$$\mathbf{N}(a * b) * \mathbf{N}a = \mathbf{N}a * \mathbf{N}b * \mathbf{N}a = \mathbf{N}a * \mathbf{N}b$$

Con esto se completa el teorema.

La interpretación de estos resultados es muy expresiva. A efectos de mostrar las formas de pensamiento que encierran cada una de estas tesis es conveniente repasar las expresiones del lenguaje que están involucradas en los conceptos del devenir. La expresión $\mathbf{A} \to \mathbf{B}$ se puede enunciar en palabras tanto: **A** *deviene* **B** como **A** *es causa de* **B**. Por otra parte, la expresión **A***__B__ se puede enunciar en palabras como: **A** *penetrado con* **B**, *la contradicción entre* **A** *y* **B**, *la unidad entre* **A** **y** **B**. Con estos recursos lingüísticos, es sumamente ilustrativo analizar todos los casos del Teorema 29.1.

La igualdad 1 se llama *ley del acontecer* y establece que el acontecer de A (su cuantificador dialéctico) coincide con el devenir de la negación de **A** en **A**. Esta es una afirmación dialéctica muy clásica, el acontecer, el suceder, el ocurrir algo consiste en una negación, algo se transforma en su afirmación. Se puede ilustrar con la tesis dialéctica: el acontecer de la sociedad capitalista es el devenir de la negación de la sociedad capitalista (la sociedad feudal) hacia la sociedad capitalista.

La igualdad 2 se llama *ley de los cambios contrarios* y establece que si ***A*** deviene la negación de ***B*** entonces también ocurre que ***B*** deviene la negación de ***A***. Esta es una propiedad material sumamente importante y que establece la vinculación material del acontecer, un cambio no puede ocurrir en forma aislada, también ocurre en forma inversa. Esta tesis se puede ilustrar con el enunciado dialéctico: si el proletariado es la causa de destrucción de la burguesía, igualmente cierto es que la burguesía es la causa de destrucción del proletariado (porque ambos dan lugar a una sociedad nueva y es la existencia de *ambos* la que provoca el movimiento).

La igualdad 3 se llama *ley de separación de las causas* y establece que la proposición ***A*** *deviene* ***B*** es la penetración dialéctica de dos acontecimientos diferentes: la transformación de A en su negación y el acontecer de ***B***. También, en forma equivalente, se puede decir que la proposición es idéntica con la penetración dialéctica del acontecer de la negación de ***A*** y el acontecer de ***B***. Bajo esta ultima forma se dirá simplemente: el devenir es la penetración de la negación del antecedente con el acontecer del consecuente. Se puede ilustrar con la tesis dialéctica: la transformación de la sociedad feudal en la sociedad capitalista es la unidad dialéctica entre el hecho de la (auto)negación de la sociedad feudal y la emergencia de la sociedad capitalista.

La igualdad 4 se llama *ley de penetración de los efectos* y establece que la transformación de ***A*** en ***B*** es lo mismo que la transformación de ***A*** en la lucha entre ***B*** y la negación de ***A***. Se puede ilustrar con el ejemplo dialéctico: la transformación de la sociedad feudal en la sociedad burguesa es lo mismo que la transformación de la sociedad feudal en la lucha entre la sociedad burguesa y la negación de la sociedad feudal.

La igualdad 5 se llama *ley de indefinición de las causas* y establece que existe una indeterminación de fondo en el acontecer de las cosas. No es posible separar mecánicamente los acontecimientos que se penetran, forman un todo indisoluble donde cualquiera de los antecedentes deviene cualquiera de los consecuentes. Se puede ilustrar con el ejemplo dialéctico: tanto es cierto que los siervos son causa de los asalariados al mismo tiempo que los señores son causa de los burgueses como que los siervos son causa de la existencia de los burgueses y los señores de los asalariados.

La igualdad 6 se llama *ley de separación de los efectos* y establece que una causa que posee dos efectos es equivalente de la penetración dialéctica de dos enunciados de causalidad. Se puede ilustrar con este ejemplo dialéctico: los señores feudales son la causa de la contradicción entre la burguesía y el proletariado y esto es lo mismo que decir que los señores feudales son causa de la existencia de la burguesía por un lado y son causa también de la existencia del proletariado por otro y estos dos hechos están indisolublemente ligados.

La proposición 7 se llama *ley de transitividad del devenir* y establece que una cadena de acontecimientos sucesivos es equivalente a los acontecimientos extremos pero penetrados con la aparición de acontecimiento intermedio. Esta forma peculiar de la transitividad, que no es la simple transitividad, es uno de los aspectos más interesantes del devenir dialéctico. Esta tesis se puede ilustrar con los enunciados dialécticos siguientes: El hecho que la sociedad esclavista se transforme en la sociedad feudal unido al hecho que la sociedad feudal se transforme en la sociedad capitalista es lo mismo que decir que la sociedad esclavista es causa de la sociedad capitalista pero habida cuenta que existió la sociedad feudal.

La proposición 8 se llama *ley de separación del acontecer* y establece la forma de movimiento de las penetraciones dialécticas: si una penetración deviene otra penetración, tanto se puede interpretar como la penetración de dos acontecimientos simples como, por la ley de indefinición de las causas, la penetración ordenada de otra forma. Este caso se ilustra con esta tesis dialéctica: la contradicción entre siervos y señores deviene la contradicción entre asalariados y burgueses y este hecho también se puede interpretar, indiferentemente, como que la causa de existencia de asalariados se encuentra en la existencia de siervos y esto penetrado con la tesis que la causa de la existencia de burgueses es la existencia de señores feudales. Equivalentemente se puede decir que la causa de la existencia de burgueses es la existencia de siervos penetrada con la afirmación correlativa sobre señores y asalariados.

La proposición 9 se llama *ley de resolución de las contradicciones* y establece la equivalencia entre la resolución de una contradicción y otras formas del devenir. Se puede ilustrar con la tesis dialéctica: la contradicción entre siervos y señores deviene la sociedad burguesa y esto es lo mismo que decir que las tesis de que los siervos son causa de la sociedad burguesa y los señores feudales son causa de la sociedad burguesa son tesis que se penetran.

La proposición 10 se llama *ley de la causa auxiliar* y establece que una causa auxiliar, tal como ***B***, puede interpretarse ya sea como la causa principal, ya sea como un elemento que se transforma. Se puede ilustrar con el ejemplo: la existencia de una lucha entre señores feudales y campesinos que termina por destruir a los señores feudales es lo mismo que decir que los campesinos destruyen a los señores feudales o que los señores feudales terminan por destruir a los campesinos.

Aparte de las propiedades generales, existen algunas propiedades particulares que son importantes:

Teorema 26.2: Sea ***A*** una tautología y ***B*** idénticamente falsa. Entonces se tiene que:

$\boldsymbol{A} \rightarrow \boldsymbol{B}$ es universalmente falsa
$\boldsymbol{B} \rightarrow \boldsymbol{A}$ es universalmente verdadera

Demostración 26.2: La primera proposición consiste en componer en forma reiterada *0*0* en tanto que la segunda consiste en componer *1*1*. De la idempotencia de la penetración sigue el resultado del teorema.

Teorema 26.3: Las proposiciones siguientes son tesis:

$\boldsymbol{A} \rightarrow \boldsymbol{A}$
$\boldsymbol{N}(\boldsymbol{A} \rightarrow \boldsymbol{A})$

Demostración 26.3: Puesto que $x * \boldsymbol{N}x$ es siempre un valor dialéctico, la primera proposición es una tesis, con valor dialéctico. Por lo tanto, también lo es la segunda proposición.

El Teorema 26.3 demuestra el clásico enunciado del devenir de Heráklito. Tanto es cierto que el río permanece como que no permanece.

Teorema 26.4: Es una tesis que toda propiedad dialéctica pura deviene cualquier otra propiedad dialéctica pura.

Demostración 26.4: Basta observar que la composición de valores dialécticos es un valor dialéctico.

Los resultados de los últimos teoremas muestran la irreversibilidad de las proposiciones en devenir. En tanto que algunos enunciados están condicionados, es muy claro que toda propiedad dialéctica puede devenir toda otra propiedad dialéctica (definida en el mismo universo material, por supuesto) con algún valor de tesis. El estudio de estos valores consiste precisamente el análisis del devenir.

En reticulados dialécticos compuestos en los cuales existen valores centrales y penetraciones principales, las propiedades del devenir se agrupan en dos zonas de valores lógicos. Por un lado las sucesivas composiciones de las instancias materiales o bien "lleva cerca" de los valores centrales o bien "oscila de verdadero a falso". En resumen, los enunciados en devenir se aproximan a enunciados en el reticulado dialéctico simple formado por los valores centrales, *0* y *1*. Esta es una de las razones por la cual tienen importancia material los reticulados dialécticos simples.

1.28 El problema de la causalidad

Llegados a este punto es conveniente detenernos un momento en las conjunciones que expresan ilación, continuación o concesión. A primera vista no parece existir ningún problema nuevo. Como todas las conjunciones, este grupo expresa una idea lógica. Como idea, es habitual declarar que expresan en una forma más o menos imprecisa la idea de *implicación* de la lógica binaria. Sin embargo el problema merece un análisis más detenido.

Es habitual suponer que las conjunciones *por tanto, por consiguiente* y otras similares que se encuentran, por ejemplo, en los textos matemáticos describen adecuadamente las funciones implicación. Esto es correcto, pero aquí no termina el problema. Igual que en el caso de la conjunción *pero* hay un contenido dialéctico especializado. También las conjunciones de ilación se emplean para formular *juicios causales* tales como:

la rotación de la tierra *es causa* del día y de la noche

Este enunciado es claramente causal, pero se puede disfrazar como un enunciado en implicación mediante la presentación siguiente:

el día y la noche *se deduce* de la rotación de la tierra

En forma general, dado un enunciado de tipo causal, tal como:

A *es causa de* ***B***

siempre existe la posibilidad –con una teoría formal mediante– de convertirlo en un enunciado deductivo del tipo:

B *se deduce de* ***A***

Sin embargo existe una diferencia fundamental entre una relación causal y un enunciado de implicación. La relación causal *vincula dos acontecimientos en un Universo que se modifica*, la función implicación *vincula dos proposiciones de una teoría formal*. El pensamiento positivista –y, en general, la actitud no critica de la ciencia– ha pretendido identificar estas dos interpretaciones irreconciliablemente diferentes que sugiere el lenguaje cotidiano. Pero la lógica binaria formal no puede formular juicios causales y aquí hay un verdadero problema a aclarar.

Los enunciados causales son verdaderos enunciados en devenir. Como se puede comprender de inmediato, es aceptable la equivalencia:

$$\textit{\textbf{A}}\ \textit{es causa de}\ \textit{\textbf{B}} = \textit{\textbf{A}} \rightarrow \textit{\textbf{B}}$$

y es este el sentido que debe darse al devenir dialéctico. De esta manera las nociones se aproximan y pueden ser estudiadas. Lo que queda por analizar ahora es el porqué de la frecuente confusión entre causalidad e implicación. El problema de fondo de la causalidad es que solamente puede ser interpretado en términos de devenir. Pero si nos colocamos en una lógica binaria, el problema cambia de aspecto.

En la lógica binaria clásica las únicas penetraciones son las operaciones lógicas "+" y ".". Consideremos el primer caso. La noción de devenir se transforma en:

$$\textit{\textbf{A}}(x,\ldots) \rightarrow \textit{\textbf{B}}(x,\ldots) = \$x\ (\textit{\textbf{NA}}(x,\ldots) + \textit{\textbf{B}}(x,\ldots) = \$x\ (\ \textit{\textbf{A}}\ \text{Þ}\ \textit{\textbf{B}}\ )$$

Esta identidad nos muestra que la noción de devenir se confunde con la *implicación*. Con la función "." ocurre algo similar, pero sobre las negaciones, aplicando De Morgan.

En la lógica binaria, por esta razón, se confunde la noción de causalidad con la noción de implicación y de allí que toda teoría que maneje la noción de causalidad, equivocadamente, se convierte en una teoría deductiva. La razón de fondo de existencia de las teorías deductivas es esta razón: la imposibilidad de la lógica tradicional de separar estas nociones.

Por esta razón, la dinámica del universo solamente puede ser comprendida en términos dialécticos.

Bibliografía

[1] J. Lukasiewicz, A. Tarski. *Untersuchungen über den Aussangenkalkul*. Comp. Rend. Acad. Vars., p.30–50, 1930.

[2] J. Lukasiewiecz. *Philosophische Bemerkungen zu Mehrwertigen Systemen des Aussagenkalkuls*. Comp. Rend. Acad. Vars., p.51–77, 1930.

[3] E.L. Post. *Introduction to a General Theory of Elementary Propositions*. Am. Jour. Math., T 43, p.163–185, 1921.

[4] J. Piaget. *Essai de Logique Operatoire*. Paris, 1972.

[5] C.A. Hooker (editor). *The Logico–Algebraic Approach to Quantum Mechanics*. 2 vols., Ontario, 1975, 1979.

[6] K.C. Smith. *The Prospects for Multivalued Logic*. IEEE Trans. Comp., C–30, p.619–634, Sep 1981.

[7] Y.H. Levendel, P.R. Menon. *Test Generation Algorithms for Computer Hardware Description Languages*. IEEE Trans. Comp., C–31, p.577– 588, Jul 1982.

[8] J.P. Hayes. *A Unified Switching Theory with Applications to VLSI Design*. Proc. IEEE, V 70, N 10, p.1140–1151, Oct 1982.

[9] G. Birkhoff. *Lattice Theory*. New York, 1948.

[10] J.D. García Bacca (traductor). *Los Presocráticos*. 2 vols, México, 1943.

[11] R.I.G. Hughes. *Quantum Logic*. Sc. Amer., V 243, N 4, p.146–157, Oct 1981.

[12] Oscar Wilde. *The Works: Epigrams*. New York, 1909.

[13] M. Granet. *La Religion des Chinois*. Paris, 1922.

[14] A.J. Toynbee. *Estudio de la Historia*. (compendio de D.C. Somervell). Buenos Aires, 1952.

[15] S. Freud. *Una teoría sexual y otros ensayos*. Obras Completas, Buenos Aires, 1952.

[16] F. Engels. *Dialéctica de la naturaleza*. México, 1961.

[17] V.I. Lenin *Materialismo y Empiriocriticismo*. Montevideo, 1966.

[18] K. Marx. *Miseria de la filosofía*. Buenos Aires, 1971.

[19] I. Guzmán de Rojas. *Problemática lógico–lingüística de la comunicación social con el pueblo aymara*. Otawa, 1982.

[20] G. Boole. *The Laws of Thought*. New York, 1958.

[21] W.V. Quine. *Paradox*. Sc. Amer., V 206, N 4, p.84–96, Apr 1962.

[22] B. Russell. *History of Western Philosophy*. London, 1961.

[23] K. Gödel. *On Formally Undecidable Proposition of Principia Mathematica and Related Systems*. l931 (From Frege to Gödel. Van Herjensort Ed. p.596–616).

[24] F. Engels. *Antidühring*. Mexico, l968.

[25] G. W. F. Hegel. *Science de la Logique*. 3 Vols, Paris, 1981.

[26] Thomason, R. H. *Symbolic Logic. An Introduction*. New York, 1970.

[27] Fitch, F. B. *Symbolic Logic. An introduction*. The Ronald Press Company, New York, 1952.